β - FUNCTION e BACKGROUND FIELD METHOD

$$\underset{\uparrow}{\mathcal{A}_\mu} = \overset{\swarrow \text{BKG FIELD}}{A_\mu} + \underset{\nwarrow}{a_\mu}$$

campo di gauge (quello che prima indicavo con $\mathcal{A}_\mu$) — fluttuazioni

$$D_\mu = \partial_\mu + i \overset{\text{BKG}}{A_\mu}$$

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \qquad a_\mu = a_\mu^a T^a$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + i[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]$$

$$= \overset{\text{BKG}}{F_{\mu\nu}} + \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu + i[A_\mu, a_\nu] + i\underbrace{[a_\mu, A_\nu]}_{= -i[A_\nu, a_\mu]} + i[a_\mu, a_\nu]$$

$$= F_{\mu\nu} + D_\mu a_\nu - D_\nu a_\mu + i[a_\mu, a_\nu]$$

Utilizzeremo il P.I. in formulazione EUCLIDEA $\int \mathcal{D}\varphi \, e^{-S[\varphi]}$

$$S_{YM} = \frac{1}{g^2} \int d^4x \, \mathrm{tr}\Big[\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2F^{\mu\nu} D_\mu a_\nu + D^\mu a^\nu D_\mu a_\nu - D^\mu a^\nu D_\nu a_\mu + i F^{\mu\nu}[a_\mu, a_\nu] + 2i D^\mu a^\nu [a_\mu, a_\nu] - \frac{1}{2}[a^\mu, a^\nu][a_\mu, a_\nu] \Big]$$

quadratici in a_μ

Trasf. di gauge: $\delta \mathcal{A}_\mu = \mathcal{D}_\mu \alpha$ $\qquad \mathcal{D}_\mu = D_\mu + i a_\mu = \partial_\mu + i \mathcal{A}_\mu$

c'è un'ambiguità nel dire come trasf. tra A e a; scegliamo

$$\delta A_\mu = 0 \qquad \delta a_\mu = D_\mu \alpha + i[a_\mu, \alpha]$$

GAUGE FIXING : $G(A,a) = D^\mu a_\mu$ ← dipende dalla scelta di campo di Bkg A_μ

Seguendo la procedura di FADDEEV–POPOV, otteniamo un termine di gauge-fixing nell'azione:

$$S_{g.f.} = \frac{1}{g^2}\int d^4x\, \mathrm{tr}\left[D^\mu a_\mu\right]^2 \quad \leftarrow G^a G^a$$

scelta di ξ fatta per comodità (semplificherà l'azione finale)

In S_{YM} c'è un termine

$$-\frac{1}{g^2}\int d^4x\, \mathrm{tr}\left[D^\mu a^\nu D_\nu a_\mu\right] \underset{\text{integriamo per parti}}{=} \frac{1}{g^2}\int d^4x\, \mathrm{tr}\left[a_\nu D^\mu D^\nu a_\mu\right] =$$

$$\partial^\mu \mathrm{tr}\left[a^\nu D_\nu a_\mu\right] = D^\mu \mathrm{tr}\left[a^\nu D_\nu a_\mu\right] = \mathrm{tr}\left[D^\mu a^\nu D_\nu a_\mu\right] + \mathrm{tr}\left[a^\nu D^\mu D_\nu a_\mu\right]$$

$$= \frac{1}{g^2}\int d^4x\, \mathrm{tr}\left[a_\nu\left(\underbrace{[D^\mu, D^\nu]}_{iF^{\mu\nu a} t^a_{Adj}} + D^\nu D^\mu\right) a_\mu\right] =$$

$$= \frac{1}{g^2}\int d^4x\, \mathrm{tr}\left[i a_\nu [F^{\mu\nu}, a_\mu]\right] \underbrace{-\frac{1}{g^2}\int d^4x\, \mathrm{tr}\left[(D^\mu a_\mu)^2\right]}_{\text{questo viene cancellato da } S_{g.f.}}$$

$$S_{YM} + S_{g.f.} = \frac{1}{g^2}\int d^4x\, \mathrm{tr}\left[\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2F^{\mu\nu}D_\mu a_\nu + D^\mu a^\nu D_\mu a_\nu \right.$$

$$\left. + 2i\, a_\nu \overset{(*)}{[F^{\mu\nu}, a_\mu]} + 2i\, D^\mu a^\nu [a_\mu, a_\nu] - \frac{1}{2}[a^\mu, a^\nu][a^\mu, a^\nu]\right]$$

due termini quadratici

$(*) \rightarrow -2i\, a_\mu [F^{\mu\nu}, a_\nu]$

(*) $\mathrm{tr}\left(F^{\mu\nu}[a_\mu, a_\nu]\right) =$

$$= \mathrm{tr}\left(F^{\mu\nu} a_\mu a_\nu - F^{\mu\nu} a_\nu a_\mu\right)$$

$$= \mathrm{tr}\left(a_\nu F^{\mu\nu} a_\mu - a_\mu F^{\mu\nu} a_\nu\right)$$

usiamo varie volte ciclicità della traccia

$$= \mathrm{tr}\left(a_\nu F^{\mu\nu} a_\mu - a_\nu a_\mu F^{\mu\nu}\right)$$

$$= \mathrm{tr}\left(a_\nu [F^{\mu\nu}, a_\mu]\right)$$

$G(A,a) = D^\mu a_\mu$

Nell' integrale sui cammini in FP otteniamo utilizzando

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha \, \delta\left(G(A^\alpha, a^\alpha)\right) \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha, a^\alpha)}{\delta \alpha}\right)$$

dove $A^\alpha_\mu = A_\mu \qquad a^\alpha_\mu = a_\mu + D_\mu \alpha + i[a_\mu, \alpha]$

Il det di FP sarà riscritto come

$$\det\left(\frac{\delta G(A^\alpha, a^\alpha)}{\delta \alpha}\right) = \int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c} \; e^{-\frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\left[-\bar{c} D^2 c - i\bar{c} D^\mu [a_\mu, c]\right]}$$

scegliamo qto fattore più conveniente

termine quadratico in $c, \bar{c}, a$

Proseguendo con FP, l'integrale su $\mathcal{D}\alpha$ disaccoppia e rimaniamo con l'integrale sui cammini di e^{-S} dove

$$S = S_{YM} + S_{g.f.} + S_{gh}$$

S è invariante sotto $A_\mu \mapsto U^{-1} A_\mu U - \partial_\mu U U^{-1} \qquad a_\mu \mapsto U^{-1} a_\mu U$ (A)

Integriamo su $a_\mu, c, \bar{c}$

$$e^{-S_{eff}[A]} \equiv \int \underbrace{\mathcal{D}a\,\mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}}_{\substack{\text{invariante}\\ \text{sotto trasf. }(\star)}} \; e^{-S[A,a,c,\bar{c}]}$$

Anche $S_{eff}[A]$ è INVARIANTE sotto $(\star)$ (trasf. di gauge del campo di bkg. A_μ)

Scegliamo come campo di bkg A_μ una soluzione delle eq. del moto classiche ($D_\mu F^{\mu\nu} = 0$) $\Rightarrow$ termini lineari in S_{YM} scompaiono (espansione di $S_{YM}(A)$ attorno a soluz. di eq. del moto)

Vogliamo calcolarci $S_{eff}[A]$; dobbiamo poi fare il P.I. e lo calcoliamo fermandoci a 1-LOOP. $\Rightarrow$ possiamo ignorare termini che NON siano quadratici

$\Downarrow$

il P.I. diventa Gaussiano

vertice interazione forzerebbe ad avere diagrammi almeno 2-loop.

$$e^{-S_{eff}[A]} = e^{-\frac{1}{2g^2}\int d^4x \,\mathrm{tr}\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}} \left(\det \Delta_{gauge}\right)^{-1/2} \left(\det \Delta_{gh}\right)$$

$$\Delta^{\mu\nu}_{gauge} = -D^2\delta^{\mu\nu} - 2i\left[F^{\mu\nu}, \cdot\,\right] \qquad \Delta_{gh} = -D^2$$

matrice che agisce su indice ν

$$\left(\det\Delta = e^{\log\det\Delta} = e^{\mathrm{tr}\log\Delta} \right)$$

$$\log\det\Delta = \mathrm{tr}\log\Delta$$

$$S_{eff}[A] = \frac{1}{2g^2}\int d^dx \, \mathrm{tr}\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\log \Delta_{gauge} - \mathrm{Tr}\,\log \Delta_{gh}$$

traccia su group indices, lorentz indices, sp. funz.

S_{eff} ha termini che divergono a 1-loop. Per cancellare più no bisogna RINORMALIZZARE le cost. di accoppiamento

$$S_{eff} = S_{YM}(A) + \text{1-loop}$$

$$\frac{1}{g_B^2}(\dots) = \frac{1}{g_r^2}(\dots) - \cancel{\text{div.}} \quad \cancel{\text{div.}} + \dots$$

↳ questo darà la relazione tra g_B e g_r (che poi ci permette di calcolare β)

S_{eff} è inv. sotto trasf. di gauge di A → però simmetria che vale $S_{YM}(A)$ e deve valere anche per i termini divergenti ⇒ termini div. saranno del tipo

$$\frac{1}{2-\omega}\,(\dots)$$

funzionale in A invariante sotto trasf. g. di A.
QUADRATICO

⇒ cioè $(\dots) \propto S_{YM}(A)$

$\boxed{\Delta_{gh}}$

$$\Delta_{gh} = -D^2 = -\partial^2 + \Delta_1 + \Delta_2$$

$\Delta_2 \to [A^\mu, [A_\mu, \cdot\,]] = A^{\mu a} A^b_\mu \cdot T^a_{Adj} \cdot T^b_{Adj}$

$\Delta_1 = -i\,\partial^\mu A_\mu - iA_\mu \partial^\mu = -i\,\{\partial^\mu, A_\mu\} = -i\{\partial^\mu, A^a_\mu\}\, T^a_{Adj}$

$$\mathrm{Tr}\log \Delta_{gh} = \mathrm{Tr}\log\big(\underbrace{-\partial^2 + \Delta_1 + \Delta_2}_{(-\partial^2)(1+(-\partial^2)^{-1}(\Delta_1+\Delta_2))}\big) = \mathrm{Tr}\log(-\partial^2) + \mathrm{Tr}\log\big(1 + (-\partial^2)^{-1}(\Delta_1+\Delta_2)\big)$$

$$= \mathrm{Tr}\log(-\partial^2) + \mathrm{Tr}\left[(-\partial^2)^{-1}(\Delta_1+\Delta_2)\right] - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\left((-\partial^2)^{-1}(\Delta_1+\Delta_2)\right)^2\right] + \dots$$

termine cost che trascuriamo

lineare in A_μ e $\mathrm{tr}\, t^a = 0$

termini che contengono potenze di A^μ superiori a 2 (Infatti vengono cancellati dalla parte cubica e quartica di S_{YM})

$|x\rangle \qquad |k\rangle$