$\boxed{AX = B}$ $\quad A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad B \in \mathbb{K}^m$

$\boxed{\dim \Sigma = \dim \Sigma_0}$

$\Sigma \subset \mathbb{K}^n$ insieme delle soluzioni di $AX = B$

$\Sigma = \emptyset$ oppure Σ sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$

$$\boxed{\Sigma = \bar{X} + \Sigma_0}$$

Σ_0 è giacitura di Σ

$\bar{X} \in \Sigma$ soluzione particolare di $AX = B$

$\Sigma_0 \subset \mathbb{K}^n$ spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato $AX = 0$

sottospazio vett.

Teorema di Rouché - Capelli. Un sistema lineare $AX = B$ è compatibile $\Longleftrightarrow$ $rg(A) = rg(A|B)$. In tal caso, detto Σ lo spazio delle soluzioni, si ha

$$\boxed{\dim \Sigma = n - r}$$

con $n = \#$ incognite, $r = rg(A) = rg(A|B)$.

In particolare, se $r = n$, il sistema ammette un'unica soluzione.

Notazione: se $\mathbb{K}$ è infinito ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$), si dice che $AX = B$ ha ∞^{n-r} soluzioni se $r < n$.

Dim Abbiamo dimostrato ieri che $AX = B$ compatibile

$$\iff \quad rg(A) = rg(A|B) =: r$$

Dimostriamo che $\boxed{\dim \Sigma = n - r}$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$\dim \Sigma_0 = \dim \Sigma$

$\Sigma_0)\quad AX = 0$

$$L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

$$\boxed{\Sigma_0 = \operatorname{Ker} L_A} = \operatorname{null} L_A$$

Formula delle dim

$$n = \operatorname{null} L_A + rg(L_A) = \dim \Sigma_0 + rg A = \dim \Sigma + r$$

$$\dim \Sigma = n - r.$$

Metodo di eliminazione di Gauss (o di Gauss - Jordan).

$$A X = B \qquad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \text{— — — — — —} \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

Due sistemi $AX = B$, $A'X = B'$ sono <u>equivalenti</u> se

$\Sigma = \Sigma'$ (hanno le stesse soluzioni)

1) possiamo assumere che $a_{11} \neq 0$ (a meno di scambiare due equazioni)

2) Possiamo assumere $a_{11} = 1$ a meno di moltiplicare la 1ª equazione per a_{11}^{-1}

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{11}^{-1} (a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n) = a_{11}^{-1} b_1$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{x_1 + \dots + a_{1n} a_{11}^{-1} x_n = a_{11}^{-1} b_1 = b_1'}$$

$-a_{i1}$

i-esima

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12} x_2 + \dots + a'_{1n} x_n = b'_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots = b_m \end{cases}$$

Sostituire alla i-esima equazione, $i > 1$, la i-esima sommata alla 1ª moltiplicata per $(-a_{i1})$

nelle equazioni successive alla 1ª non compare x_1.

$$
\left\{
\begin{array}{l}
x_1 + a'_{12} x_2 + \cdots + a'_{1n} x_n = b'_1 \\
\quad \boxed{
\begin{array}{lcl}
a'_{22} x_2 + \cdots & = & b'_2 \\
a'_{32} x_2 + \cdots & = & b'_3 \\
\text{---} \quad \text{---} & & \text{---} \\
a'_{m2} x_2 + \cdots & = & b'_m
\end{array}
}
\end{array}
\right.
$$

$$\begin{cases} x_1 + \cdots = b_1 \\ \quad x_{k_2} + \cdots = b_2 \\ \qquad x_{k_3} + \cdots = b_3 \\ \qquad - - - - \\ \qquad\quad x_{k_t} + \cdots = b_t \end{cases}$$

$$t \leq m$$

$$\cancel{0 = 0}$$

$$0 = \alpha \quad (\alpha \neq 0)$$

non compatibile.

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_2 - x_3 = -3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ \boxed{x_3 = -2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = -2 \\ x_2 = 5 \\ x_1 = -5 \end{cases} \qquad X = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(A \mid B)$$

Operazioni elementari sulle righe

1) Scambiare due righe
2) moltiplicare una riga per $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{K}$
3) sostituire $A^{(i)}$ con $A^{(i)} + \alpha A^{(j)}$, $\alpha \in \mathbb{K}$

Un sistema (o matrice) nella forma che si ottiene applicando il metodo di Gauss è detto sistema (o matrice) a gradini (o a scala)

PIVOT $\neq 0$

$$M \rightsquigarrow \begin{pmatrix} * & \cdots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & * & \cdots \\ & & & \cdots & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_4 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & -2 \end{array}\right)$$

$$x_1 + \underbrace{\frac{1}{2} x_2}\ - x_4 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} t + t =$$

$$x_1 = \frac{2}{3} + \frac{11}{6} t$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} - \frac{5}{3} t$$

$$3 x_3 + 7 x_4 = -2$$

$$\boxed{x_4 = t}$$ (Parametro)

$$x_3 = -\frac{2}{3} - \frac{7}{3} t$$

$$x_2 - 2 x_3 - 3 x_4 = 1$$

$$x_2 = 1 - \frac{4}{3} - \frac{14}{3} t + 3 t$$

$$X = \bar{X} + U, \quad U \in \Sigma_0$$

$$U = X - \bar{X}$$

Sol. generale
$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} + \frac{11}{6} t \\ x_2 = -\frac{1}{3} - \frac{5}{3} t \\ x_3 = -\frac{2}{3} - \frac{7}{3} t \\ x_4 = t \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$ (parametro)

∞^1 soluz.

$\dim \Sigma = 1$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le sol. del sistema omogeneo associato si ottengono togliendo i termini noti

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{6} t \\ x_2 = -\frac{5}{3} t \\ x_3 = -\frac{7}{3} t \\ x_4 = t \end{cases}$$

$t = 1$

$$v = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} \\ -5/3 \\ -7/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$ base di Σ_0

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$x_3 = t$

$x_4 = u$

$t, u \in \mathbb{R}$

e quindi

$$\begin{cases} x_2 = 2t - u + 3 \\ x_1 = \underline{-2t} \underline{+u} - 3 \underline{+t} - 2 = -t + u - 5 \end{cases}$$

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 = -t + u \underline{-5} \\ x_2 = 2t - u \underline{+3} \\ x_3 = t \\ x_4 = u \end{cases}$$

equazioni parametriche di Σ

$$\Sigma_0 : \begin{cases} x_1 = -t + u \\ x_2 = 2t - u \\ x_3 = t \\ x_4 = u \end{cases} \qquad \infty^2$$

base

$(t, u) = \begin{cases} (1, 0) \\ (0, 1) \end{cases}$

$$\begin{cases} v_1 = {}^t(-1, 2, 1, 0) \\ v_2 = {}^t(1, -1, 0, 1) \end{cases}$$