Università di Trieste

Corso di studio: ME14 -
TECNICHE DI RADIOLOGIA MEDICA, PER IMMAGINI E RADIOTERAPIA

Modulo di Analisi Matematica 493ME-4 del corso di
Basi propedeutiche alle scienze radiologiche [493ME]
Anno Accademico 2020/2021

Prof. Franco Obersnel

Le presenti note sono di supporto al corso. Questo non è un testo di matematica e le nozioni sono indicate in modo schematico e non sempre formale e preciso. Le note non sono un sostituto di quanto viene spiegato a lezione. Con grande probabilità nel corso non verranno trattati tutti gli argomenti riportati nelle presenti note; allo stesso modo è probabile che alcuni argomenti considerati a lezione non trovino traccia in questo testo.

Notazioni preliminari

$\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali $0, 1, 2, 3, \ldots$.
$\mathbb{N}^+$ è l'insieme dei numeri naturali positivi $1, 2, 3, \ldots$.
$\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$.
$\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali $\frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, dove si identificano frazioni equivalenti, cioè si pone $\frac{m}{n} = \frac{j}{k}$ se $mk = nj$.
$\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali.
$\mathbb{C}$ è l'insieme dei numeri complessi.

Il simbolo $\subset$ indica l'inclusione tra insiemi. $A \subset B$ significa A è contenuto in B (si noti che $A \subset A$ per ogni insieme A).
Il simbolo $\in$ indica l'appartenenza ad un insieme. $x \in X$ significa x è un elemento dell'insieme X.

Notazioni di intervalli: siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, definiamo allora

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$; $\quad]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$; $\quad [a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$;
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$; $\quad]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$; $\quad]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$;
$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$; $\quad]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$; $\quad]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Funzioni

Funzioni tra insiemi

• Una funzione $f : D \to C$ è una relazione tra gli oggetti di D e gli oggetti di C che soddisfa la proprietà seguente:
"ad ogni elemento di D viene associato uno ed un solo elemento di C"

L'insieme D si dice il dominio della funzione, l'insieme C si dice il codominio della funzione.

• Diremo grafico di $f : D \to C$ il sottoinsieme Γ del prodotto cartesiano $D \times C$ definito da

$$\Gamma = \{\big(d, f(d)\big) \in D \times C : d \in D\}$$

• Diremo immagine di $f : D \to C$ l'insieme $Im(f) = f(D)$ dei valori assunti da f:

$$Im(f) = \{f(d) : d \in D\}$$

Attenzione! Non è detto che $Im(f)$ coincida con C.

Si osservi che $Im(f)$ è l'insieme degli elementi c per cui l'equazione $f(x) = c$ ammette soluzioni $x \in D$.

• Una funzione $f : D \to C$ si dice suriettiva se $Im(f) = C$.
• Una funzione $f : D \to C$ si dice iniettiva se per ogni d_1, d_2 appartenenti a D vale l'implicazione

$$f(d_1) = f(d_2) \quad \longrightarrow \quad d_1 = d_2$$

• Una funzione $f : D \to C$ si dice biiettiva se è iniettiva e suriettiva.
• Sia $f : D \to C$ una funzione; si dice funzione inversa di f una funzione $g : C \to D$ così definita:

$$g(y) = x \text{ se e solo se } f(x) = y$$

Se è definita, la funzione inversa è univocamente determinata.
Una funzione si dice invertibile se è definita la sua funzione inversa.
Una funzione è invertibile se e soltanto se è biettiva.

Funzioni reali di variabile reale
• Definizione di valore assoluto:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0; \\ x & \text{ser } x \geq 0. \end{cases}$$

• $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice crescente se per ogni x_1, x_2 appartenenti ad E vale l'implicazione
$x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$
(Se vale $x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$ f si dice strettamente crescente)

• $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice decrescente se per ogni x_1, x_2 appartenenti ad E vale l'implicazione
$x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$
(Se vale $x_1 < x_2 \quad \longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$ f si dice strettamente decrescente)

• $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice monotona se è crescente oppure decrescente.

• Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme simmetrico rispetto all'origine, cioè tale che, se $x \in E$ allora anche $-x \in E$. Diremo allora che

$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è pari se per ogni $x \in E$ si ha $f(-x) = f(x)$; $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è dispari se per ogni $x \in E$ si ha $f(-x) = -f(x)$.

• $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice limitata se esiste una costante K tale che $|f(x)| \leq K$ per ogni $x \in E$. f si dice superiormente limitata se esiste una costante K tale che $f(x) \leq K$ per ogni $x \in E$; in questo caso, la più piccola di queste limitazioni superiori si dice l'estremo superiore di f e si scrive $\sup f$. f si dice inferiormente limitata se esiste una costante K tale che $f(x) \geq K$ per ogni $x \in E$; in questo caso, la più grande di queste limitazioni inferiori si dice l'estremo inferiore di f e si scrive $\inf f$.

• Sia $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$. $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo T se per ogni $x \in E$ si ha $x - T \in E$, $x + T \in E$, $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.

Se $T > 0$ è periodo di f, per ogni naturale $n \in \mathbb{N}^+$ anche nT è periodo di f. Perciò i periodi di una funzione periodica sono infiniti. Per questo motivo, talvolta, quando si parla di "periodo di una funzione" si intende il periodo minimo della funzione.

Operazioni tra funzioni

Funzioni reali di variabile reale si possono sommare e moltiplicare tra loro. La definizione è puntuale, cioè, se $f, g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$; $\qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ per ogni $x \in E$.
Se $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in E$ si può definire la funzione reciproca di f: $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$ per ogni $x \in E$.

Attenzione! Non confondere la funzione reciproca con la funzione inversa! Per questo motivo è consigliabile NON utilizzare il simbolo $f^{-1}(x)$ per indicare la funzione reciproca; infatti il simbolo f^{-1} di solito indica la funzione inversa.

• Funzione composta. Siano $f : E \to \mathbb{R}$, $g : F \to \mathbb{R}$, $F \subset Im(f)$. Allora si può definire la funzione h composta di f con g (scriveremo $h = g \circ f : E \to \mathbb{R}$) definita da

$$h(x) = g\big(f(x)\big)$$

Attenzione! La composizione di funzioni non è commutativa, cioè in generale $f \circ g \neq g \circ f$!

• Grafici di alcune composizioni.

Esempio importante: la densità di probabilità gaussiana:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Sia $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Possiamo considerare alcuni particolari casi di funzioni composte

$f_1(x) = f(x - a)$; f_1 è definita sull'insieme $\{x - a : x \in E\}$.
Il grafico di f_1 corrisponde ad una traslazione a destra del grafico di f.

$f_2(x) = f(x + a)$; f_2 è definita sull'insieme $\{x + a : x \in E\}$.
Il grafico di f_2 corrisponde ad una traslazione a sinistra del grafico di f.

$f_3(x) = f(x) + a$, $f_4(x) = f(x) - a$, $f_5(x) = -f(x)$; f_3, f_4, f_5 sono definite sull'insieme E.
Il grafico di f_3 corrisponde ad una traslazione in alto del grafico di f.
Il grafico di f_4 corrisponde ad una traslazione in basso del grafico di f.
Il grafico di f_5 è simmetrico rispetto all'asse x (delle ascisse) del grafico di f.

$f_6(x) = f(-x)$; f_6 è definita sull'insieme $\{x : -x \in E\}$.
Il grafico di f_6 è simmetrico rispetto all'asse y (delle ordinate) del grafico di f.

$f_7(x) = f(ax)$; f_7 è definita sull'insieme $\{\frac{x}{a} : x \in E\}$.
Il grafico di f_7 corrisponde a una dilatazione (se $0 < a < 1$) o a una contrazione (se $a > 1$) nella direzione dell'asse x (delle ascisse) del grafico di f.

$f_8(x) = af(x)$, $f_9(x) = |f(x)|$; f_8, f_9 sono definite sull'insieme E.
Il grafico di f_8 corrisponde a una contrazione (se $0 < a < 1$) o a una dilatazione (se $a > 1$) nella direzione dell'asse y (delle ordinate) del grafico di f.
Il grafico di f_9 è uguale a quello di f dove i valori di f sono positivi, viene rovesciato rispetto all'asse x (delle ascisse) dove i valori di f sono negativi.

$f_{10}(x) = f(|x|)$; f_{10} è definita sull'insieme $\{x : |x| \in E\}$.
Il grafico di f_{10} è uguale a quello di f dove $x \geq 0$, dove $x < 0$ si può ottenere rovesciando rispetto all'asse y (delle ordinate) il grafico della parte dove $x \geq 0$.

• Sia $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo $T > 0$. Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Allora la funzione $g(x) = f(ax)$ è periodica di periodo $\frac{T}{a}$.

Successioni

• Una successione è una funzione $f : E \subset \mathbb{N} \to C$ (talvolta si considera $E \subset \mathbb{Z}$) definita su un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ (o $\mathbb{Z}$).

Si usa scrivere a_n (o x_n, y_n, ecc.) anziché $f(n)$. La successione si indica solitamente con $\big(x_n\big)_n$ o scritture simili.

- Progressione aritmetica: $a_{n+1} - a_n = c$ costante per ogni n.
- Progressione geometrica $\frac{a_{n+1}}{a_n} = c$ costante per ogni n.

• Una serie è una successione il cui termine $n-$esimo è la somma dei primi termini (di indice inferiore o uguale a n) di una successione assegnata:

sia $\big(a_n\big)_n$ è una successione assegnata, si pone $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. La successione $\big(s_n\big)_n$ si dice la serie, di termine generale a_n e ridotte (o somme parziali) s_n.

• Nozione di limite di una successione. Sia $\big(a_n\big)_n$una successione e $l \in \mathbb{R}$. Si dice che l è il limite della successione e si scrive $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ se, scelto comunque un numero positivo $\varepsilon > 0$, esiste un numero abbastanza grande $\hat{n}$ tale che $|a_n - l| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \hat{n}$.

• Due formule utili: per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, si ha

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

• Nozione di somma di una serie. Sia $\big(a_n\big)_n$ una successione e $s \in \mathbb{R}$. Si ponga, per ogni n, $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Si dice che s è la somma della serie corrispondente $\big(s_n\big)_n$ e si scrive $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s$ se $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$.

• Serie geometrica di ragione x. La serie geometrica converge se la ragione x soddisfa $|x| < 1$ e si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

• Serie armonica. La serie armonica diverge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

• Numero di Nepero e. Si definisce $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(1 + \dfrac{1}{n}\big)^n = e$.

Funzioni elementari

Funzioni algebriche
• funzioni lineari: $f(x) = mx + q$ (m è il coefficiente angolare)
• Equazione della retta in forma cartesiana: $ax + by + c = 0$.
• Equazione della retta passante per i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2):

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Equazione di una retta in forma parametrica

$$\begin{cases} x = \alpha + rt \\ y = \beta + st \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Equazione parametrica di un segmento congiungente due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2):

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} ; t \in [0,1]$$

• funzioni razionali intere (polinomiali)

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0; \qquad\qquad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0$$

n è il grado della funzione.

• Proprietà algebriche delle potenze:
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e per ogni $n, m \in \mathbb{N}^+$,

$$x^{n+m} = x^n x^m$$
$$(x^n)^m = x^{nm}$$
$$(xy)^n = x^n y^n$$

• Radici
Se n è dispari la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^n$ è strettamente crescente, dispari, invertibile; la sua funzione inversa si dice la radice $n-$esima:

$$\text{n dispari: } \sqrt[n]{y} = x \text{ se e solo se } x^n = y.$$

Se n è pari la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^n$ non è monotona, è pari, non è suriettiva, non è iniettiva. Tuttavia, per ogni $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, esiste uno ed un solo $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, tale che $x^n = y$. Se $y \geq 0$ diremo radice $n-$esima di y l'unico numero maggiore o uguale a zero x tale che $x^n = y$. La radice $n-$esima è la funzione inversa della funzione $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ definita da $f(x) = x^n$.

$$\text{n pari: } y \geq 0, \ \sqrt[n]{y} = x \text{ se e solo se } x \geq 0, \ x^n = y.$$

Attenzione! $\sqrt{x}$ è sempre un numero positivo (o nullo). Quindi è errato scrivere ad esempio $\sqrt{4} = \pm 2$. Invece è corretto scrivere che le soluzioni dell'equazione $x^2 = 4$ sono $\pm\sqrt{4} = \pm 2$.

• Potenze di esponente razionale.
Sia $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$. Poniamo allora

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Si osservi che $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(x^n\right)^{\frac{1}{n}} = x$

Sia $x \neq 0$. Si pone per definizione $x^0 = 1$.

Attenzione! Non è definita la potenza 0^0.

Sia $x > 0$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$, si pone allora

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

Sia $x > 0$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$, si pone allora

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{m}{n}}$$

In particolare si ha $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Anche per le potenze di esponente razionale valgono le proprietà algebriche sopra descritte per le potenze di esponente naturale.

Attenzione! Le potenze di esponente razionale sono generalmente definite soltanto per $x > 0$, anche se in alcuni casi avrebbe un significato anche considerare una base negativa o nulla. Per questo motivo, ad esempio, le funzioni $x^{\frac{1}{3}}$ e $\sqrt[3]{x}$ devono essere considerate diverse, in quanto la prima è definita su $]0, +\infty[$, mentre la seconda è definita su $\mathbb{R}$.

• Funzioni razionali e funzioni algebriche.

Una funzione razionale è una funzione del tipo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, con p, q funzioni razionali intere. Il dominio della funzione f è l'insieme di tutti i numeri reali ad esclusione degli zeri del polinomio q: $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

Una funzione algebrica è una funzione che ammette un'espressione analitica ottenuta mediante combinazioni di operazioni "algebriche" (addizioni, moltiplicazioni, divisioni, composizione, inversione) a partire dalle funzioni costanti e dalla funzione identica.

Una funzione non algebrica si dice trascendente (ad esempio esponenziali, logaritmi, funzioni goniometriche e tutte quelle funzioni che non si possono rappresentare con una formula).

Fenomeni di crescita e decadimento. Funzioni esponenziali e logaritmiche

• Funzioni esponenziali.

Sia $a > 0$, si può definire la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, estendendo in modo opportuno la nozione di potenza anche agli esponenti reali non razionali.

Per ogni $a > 0$ la funzione esponenziale a^x assume sempre valori strettamente positivi. Inoltre è strettamente crescente se $a > 1$, è costante se $a = 1$, è strettamente decrescente se $0 < a < 1$.

L'insieme immagine dell'esponenziale è $Im(f) =]0, +\infty[$, per ogni $a > 0$, tranne nel caso banale in cui $a = 1$ (in questo caso $Im(f) = \{1\}$).

Nel caso $a = e$ la retta tangente il grafico della funzione esponenziale $f(x) = e^x$ nel punto $(0, 1)$ ha coefficiente angolare $m = 1$ (la sua equazione è $y = 1 + x$).

• Confronti asintotici.

La crescita esponenziale ($a > 1$) è proporzionale al valore della funzione. Se confrontiamo una funzione esponenziale a^x, $a > 1$, con una potenza qualsiasi x^α, per valori sufficientemente grandi di x la funzione esponenziale sarà sempre più grande della funzione potenza. Si usa dire che per $x \to +\infty$ la funzione esponenziale è un infinito di ordine soprareale, cioè superiore a α, per qualsiasi numero reale α.

In modo simile il decadimento esponenziale ($0 < a < 1$) è proporzionale al valore della funzione. Se confrontiamo una funzione esponenziale a^x, $0 < a < 1$, con una potenza qualsiasi $\frac{1}{x^\alpha}$, per valori sufficientemente grandi di x la funzione esponenziale sarà sempre più vicina a zero della funzione potenza. Si usa dire che per $x \to +\infty$ la funzione esponenziale è un infinitesimo di ordine soprareale, cioè più "forte" di α, per qualsiasi numero reale α.

• Funzioni logaritmiche.

Sia $a > 0$, $a \neq 1$. La funzione $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ definita da $f(x) = a^x$ è biiettiva e quindi invertibile. La funzione inversa si dice logaritmo in base a. Si avrà dunque, per ogni $y \in \mathbb{R}, y > 0$,

$$\log_a y = x \text{ se e solo se } a^x = y$$

Attenzione! La funzione logaritmo è definita solo per numeri positivi ma ha valori che possono essere negativi, nulli o positivi. Si osservi che $\log_a 1 = 0$ per qualsiasi $a > 0, a \neq 1$.

Se $a > 1$ la funzione logaritmo è strettamente crescente, se $0 < a < 1$ la funzione logaritmo è strettamente decrescente.

• Proprietà algebriche dei logaritmi: per ogni $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x, y > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a(x)$$
$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

• Logaritmo naturale e logaritmo decimale.

Si dice logaritmo naturale il logaritmo in base e: $\ln x = \log_e x$, logaritmo decimale il logaritmo in base 10: $\mathrm{Log}\, x = \log_{10} x$.

Attenzione! Il simbolo $\log x$ (senza indicazione della base) viene utilizzato da alcuni autori per il logaritmo naturale, da altri autori per il logaritmo decimale; altre volte è utilizzato per considerazioni in cui la base non è rilevante. Quando incontrate tale simbolo è importante capire qual è la base considerata in quel contesto.

Il logaritmo decimale fornisce l'ordine di grandezza di una quantità: $\mathrm{Log}\,(10^n) = n$.

Esempi importanti: il pH e il decibel.

$$pH = -\mathrm{Log}\,\big(\gamma \frac{[H_3O^+]}{C^0_{H^+}}\big)$$
$$S = 10\,\mathrm{Log}\,\big(\frac{I}{I_0}\big) = 10\,\mathrm{Log}\,\big(\frac{p^2}{p_0^2}\big) = 20\,\mathrm{Log}\,\big(\frac{p}{p_0}\big)$$

Scale logaritmiche e semilogaritmiche.

Se in un diagramma (doppiamente) logaritmico x, y è rappresentato un grafico del tipo $y = g(x)$, nel corrispondente diagramma cartesiano otteniamo la relazione $f(t) = 10^{g(\mathrm{Log}\,(t))}$.

Se si vuole rappresentare su un diagramma logaritmico una funzione $f(t)$, si disegnerà il grafico corrispondente $y = \mathrm{Log}\,(f(10^x))$.

Fenomeni oscillatori. Le funzioni trigonometriche

• seno e coseno di un angolo:

$x = \cos(\vartheta)$ e $y = \mathrm{sen}\,(\vartheta)$ sono le coordinate (parametriche) del punto (x, y) appartenente al cerchio unitario di quazione $x^2 + y^2 = 1$, dove ϑ è l'angolo compreso tra l'asse delle x e il segmento congiungente l'origine $(0, 0)$ con il punto (x, y).

In un triangolo rettangolo di ipotenusa c e cateti a, b, si avrà $c \cdot \cos(\vartheta) = a$ e $c \cdot \mathrm{sen}\,(\vartheta) = b$, se ϑ è l'angolo opposto al cateto a.

• misura in radianti

la misura di un radiante è l'ampiezza di un angolo che sottende un arco di cerchio di lunghezza pari al raggio del cerchio; questo non dipende dal raggio del cerchio.

Pertanto la corrispondenza tra gradi sessagesimali e radianti è: radianti $= \frac{\pi}{180}$ gradi.

• le funzioni $\mathrm{sen}\, x$, $\cos x$ e $\mathrm{tg}\, x$.

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \mathrm{sen}\,(x)$, è definita interpretando x come angolo di rotazione, pertanto x si può considerare appartenente a $\mathbb{R}$. Similmente per $f(x) = \cos(x)$.

Si osservi che $\cos(x) = 0$ se e solo se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Possiamo quindi definire la funzione tangente:

$\mathrm{tg}\,(x) = \frac{\mathrm{sen}\,(x)}{\cos(x)}$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Le funzioni $\mathrm{sen}\, x$ e $\cos x$ sono limitate e periodiche di periodo minimo 2π; la funzione $\mathrm{tg}\, x$ è illimitata e periodica di periodo minimo π.

Le funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{tg} x$ sono dispari. La funzione $\cos x$ è pari.

• Formule fondamentali.

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$
$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(y) \text{ per ogni } x, y \in \mathbb{R}$$
$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(y) \text{ per ogni } x, y \in \mathbb{R}$$

Si noti in particolare che $\cos(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$, per ogni $x \in \mathbb{R}$; quindi il grafico del coseno è uguale al grafico del seno traslato di $\frac{\pi}{2}$ verso sinistra.

• Funzioni del tipo $f(x) = A \cdot \operatorname{sen}(\omega x + \varphi)$
A ampiezza, $\frac{\omega}{2\pi}$ frequenza ($\frac{2\pi}{\omega}$ periodo), φ fase.

• Teorema di rappresentazione di un segnale in serie di Fourier.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione sufficientemente regolare, periodica di periodo $T > 0$. Posto $\omega = \frac{2\pi}{T}$, esistono due successioni di numeri $\big(a_n\big)_n$ e $\big(b_n\big)_n$ tali che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(a_n \cdot \cos(n\omega x) + b_n \cdot \operatorname{sen}(n\omega x)\big)$$

Il linguaggio dell'analisi complessa permette di semplificare formalmente la scrittura come segue

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{i\omega n x}$$

La conoscenza della funzione permette di calcolare i coefficienti della serie (mediante opportune formule che non riportiamo). Viceversa, la conoscenza dei coefficienti della serie permette di ricostruire la funzione.

I coefficienti della serie possono essere pensati come i valori di una funzione (successione) : $\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, con $\hat{f}(n) = \gamma_n$.

Si può quindi riscrivere la serie come

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{i\omega n x}$$

La funzione $\hat{f}$ è una "trasformata" della funzione f. Si dice che f è definita nel "dominio del tempo", mentre $\hat{f}$ è definita nel "dominio delle frequenze".

È quindi possibile passare dal "dominio del tempo" al "dominio delle frequenze" e viceversa.

Si osservi che in questo caso il dominio delle frequenze è "discreto" (cioè $\mathbb{Z}$).

Se la funzione non è periodica si sostituisce la serie con un integrale; $\sum$ diventa $\int$, la variabile discreta $n \in \mathbb{Z}$ di $\hat{f}$ diventa la variabile continua $s \in \mathbb{R}$. Si parla in questo caso di tasformata di Fourier e si ha

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s) e^{i\omega s x} \, ds$$

• Funzioni trigonometriche inverse.
Una funzione periodica non è mai invertibile. In particolare non sono invertibili le funzioni $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

Si dice arcoseno la funzione inversa della restrizione della funzione seno all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e pensata con valori in $[-1.1]$. Cioè, posto $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $f(x) = \operatorname{sen} x$, si ha $\arcsin(y) = x$ se e solo se $y = f(x)$. Cioè, più precisamente:

$$\text{per } x \in [-1,1],\ \arcsin(x) = y \text{ se e solo se } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ e } \operatorname{sen}(y) = x$$

Similmente, si dice arcotangente la funzione inversa della restrizione della funzione tangente all'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Cioè

$$\text{per } x \in \mathbb{R},\ \operatorname{arctg}(x) = y \text{ se e solo se } y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ e } \operatorname{tg}(y) = x$$

Si dice arcocoseno la funzione inversa della restrizione della funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$. Cioè

$$\text{per } x \in [-1,1],\ \arccos(x) = y \text{ se e solo se } y \in [0, \pi] \text{ e } \cos(y) = x$$

Si osservi che la funzione arcocoseno è definita su $[-1,1]$, è sempre positiva (nulla in 1) e decrescente. La funzione non è pari, però ha grafico simmetrico rispetto al punto $(0, \frac{\pi}{2})$. La funzione ha valori in $[0, \pi]$.

La funzione arcoseno è definita su $[-1,1]$, è dispari e strettamente crescente. La funzione ha valori in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

La funzione arcotangente è definita su $\mathbb{R}$, è limitata (la funzione ha valori in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$), dispari e strettamente crescente.

Studio globale di una funzione

Dominio di definizione. Segni della funzione. Eventuali simmetrie. Eventuale monotonia. Eventuale esistenza di massimi, minimi della funzione. Eventuale comportamento asintotico della funzione.

• Sia $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Un numero $M \in \mathbb{R}$ si dice il massimo della funzione f se esiste $x_0 \in E$ tale che $f(x_0) = M$ e si ha $f(x) \leq M$ per ogni $x \in E$. Il punto x_0 si dice un punto di massimo per f.

Un numero $m \in \mathbb{R}$ si dice il minimo della funzione f se esiste $x_0 \in E$ tale che $f(x_0) = m$ e si ha $f(x) \geq m$ per ogni $x \in E$. Il punto x_0 si dice un punto di minimo per f.

Attenzione! Il massimo (o il minimo) può non esistere (ad esempio la funzione arcotangente è limitata su $\mathbb{R}$ ma non ha massimo né minimo). Quando esiste il massimo (o il minimo) è sempre unico. Invece ci possono essere diversi (anche infiniti) punti di massimo (o di minimo).

• Nozione di limite per $x \to +\infty$ di una funzione. Sia $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione e $l \in \mathbb{R}$. Si dice che l è il limite della funzione per x che tende a $+\infty$ e si scrive $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ se, scelto comunque un numero positivo $\varepsilon > 0$, esiste un numero abbastanza grande $\hat{x}$ tale che $|f(x) - l| < \varepsilon$ per ogni $x \geq \hat{x}$.

Si dice che $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se, scelto comunque un numero arbitrariamente grande M, esiste un numero abbastanza grande $\hat{x}$ tale che $f(x) > M$ per ogni $x \geq \hat{x}$.

Una simile definizione si può dare per $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Attenzione! Non sempre esiste (finito o infinito) il limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Ad esempio una funzione periodica non costante non ha mai limite per $x \to +\infty$.

Definizioni simili, con evidente significato, possono essere date per $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Spesso, se una funzione tende a $+\infty$, è interessante capire la "velocità" con cui tale funzione tende a $+\infty$. Si parla in questo caso di ordine di infinito.

Ad esempio si dice che una funzione f è di ordine (di infinito) esponenziale se esiste finito e diverso da zero il limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{a^x}$, per un opportuna base $a > 1$.

Similmente, se una funzione tende a 0, si può studiare l'ordine di infinitesimo. Ad esempio, si dice che una funzione f è di ordine (di infinitesimo) esponenziale se esiste finito e diverso da zero il limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{a^{-x}}$, per un opportuna base $a > 1$.

Studio locale di una funzione

• Nozione di limite per $x \to x_0$ di una funzione. Sia $f :]x_0, b[\to \mathbb{R}$ oppure $f :]a, x_0[\to \mathbb{R}$ una funzione e $l \in \mathbb{R}$ oppure $l = +\infty$ oppure $l = -\infty$. Si dice che l è il limite della funzione per x che tende a x_0 e si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ se, per ogni successione $(x_n)_n$ tale che $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$, si ha $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

• Funzione continua.

Una funzione si dice continua in un punto x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Si osservi che affinché la definizione abbia significato il punto x_0 deve appartenere al dominio della funzione.

Una funzione si dice continua se è continua in ogni punto del dominio.

Una funzione si dice discontinua se esiste almeno un punto del suo dominio dove la funzione non è continua.

Tipiche funzioni discontinue sono le funzioni che presentano dei "salti" (ma vi sono discontinuità più complicate).

Attenzione! Non ha senso dire ad esempio che la funzione $\frac{1}{x}$ è discontinua in 0. Infatti 0 non appartiene al dominio della funzione!

• Proprietà locale. Si dice che una funzione soddisfa una proprietà "localmente" in un punto x_0 se esiste un intervallo $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ dove la funzione soddisfa tale proprietà.

Ad esempio x_0 è un punto di minimo locale per f se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.

Similmente x_0 è un punto di massimo locale per f se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.

Si dice anche che f è localmente crescente (decrescente) in x_0 se esiste $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x_1, x_2 \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, se $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

In modo simile si parla di funzione localmente positiva, negativa, costante, limitata, continua, ecc..

Il problema della pendenza: la derivata

• Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in]a, b[$. Diremo derivata di f nel punto x_0, se esiste, il limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se $f'(x_0)$ è finito, si dice che f è derivabile in x_0. Una funzione si dice derivabile se è derivabile in ogni punto del suo dominio. La derivata della funzione f può essere indicata in vari modi: f', Df, $\frac{df}{dx}$, f_x, $\dot{f}$, ecc. .

Vi sono alcune regole che permettono il calcolo delle derivate delle funzioni elementari. Si ha ad esempio

$$D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha - 1}; \qquad D(a^x) = a^x \ln a; \qquad D(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a};$$

$$D(\operatorname{sen} x) = \cos x; \qquad D(\cos x) = -\operatorname{sen} x; \qquad D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

• Significato geometrico. Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in]a, b[$ e sia f derivabile nel punto x_0. Allora esiste la retta tangente il grafico della funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$; $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare di questa retta e la sua equazione è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Attenzione! Se la derivata $f'(x_0)$ esiste ma è infinita, la retta tangente il grafico della funzione è verticale (parallela all'asse delle ordinate y).

• Uso della derivata nello studio della monotonia di una funzione. Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e si abbia $f'(x) \geq 0$ su $]a, b[$. Allora la funzione è crescente sull'intervallo $]a, b[$. Se invece si ha $f'(x) \leq 0$ su $]a, b[$, allora la funzione è decrescente sull'intervallo $]a, b[$.

Si osservi che la derivata indica la "pendenza" del grafico della funzione f. Se $f'(x)$ è "grande", significa che la funzione f cresce molto velocemente.

• Uso della derivata nello studio locale di una funzione. Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Sia $x_0 \in]a,b[$ un punto di minimo locale per f, oppure un punto di massimo locale per f. Allora $f'(x_0) = 0$.

Si osservi che in questi punti la tangente è orizzontale.

Attenzione! Può succedere che sia $f'(x_0) = 0$ anche se x_0 non è né un punto di minimo, né un punto di massimo (es. $f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$).

Attenzione! Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ha in a, oppure in b, un punto di minimo o di massimo, non è detto che la derivata si annulli in tali punti (es. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$).

• Funzioni convesse e funzioni concave.

Una funzione derivabile in un intervallo $[a,b]$ si dice convessa se la sua derivata è una funzione crescente. Una funzione derivabile in un intervallo $[a,b]$ si dice concava se la sua derivata è una funzione decrescente.

Se una funzione è convessa, in ogni punto del grafico la tangente "sta sotto il grafico". Se una funzione è concava, in ogni punto del grafico la tangente "sta sopra il grafico".

Esempi di funzioni convesse sono e^x, x^2, $\frac{1}{x}$ per $x > 0$, $\operatorname{sen} x$ su $[\pi, 2\pi]$, $\ldots$; esempi di funzioni concave sono $\ln x$, $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$ per $x < 0$, $\operatorname{sen} x$ su $[0,\pi]$,. . .

È possibile dare una definizione di funzione convessa anche per funzioni non derivabili.

• Punti di flesso. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ un funzione derivabile e sia $x_0 \in]a,b[$. Diremo che x_0 è un punto di flesso per f se la funzione f è convessa sull'intervallo $[a,x_0]$ ed è concava sull'intervallo $[x_0,b]$ (si parla in questo caso di punto di flesso discendente); oppure se la funzione f è concava sull'intervallo $[a,x_0]$ ed è convessa sull'intervallo $[x_0,b]$ (si parla in questo caso di punto di flesso ascendente).

In un punto di flesso il grafico attraversa la tangente.

Ad esempio 0 è punto di flesso ascendente per la funzione x^3, ed è punto di flesso discendente per la funzione $\operatorname{sen} x$.

• Uso della derivata seconda nello studio della convessità di una funzione. Si dice derivata seconda di f la funzione f'' derivata della funzione f'. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile e si abbia $f''(x) \geq 0$ su $[a,b]$. Allora la funzione è convessa sull'intervallo $[a,b]$. Se invece si ha $f''(x) \leq 0$ su $[a,b]$, allora la funzione è concava sull'intervallo $[a,b]$.

In un punto di flesso si ha $f''(x_0) = 0$.

Attenzione! Può succedere che sia $f''(x_0) = 0$ anche se x_0 non è un punto di flesso (es. $f(x) = x^4$ in $x_0 = 0$).

Si osservi che la derivata seconda indica la "curvatura" del grafico della funzione f. Se $f''(x)$ è "grande", significa che il grafico della funzione f cambia pendenza molto velocemente.

Il problema dell'area: l'integrale

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Diremo integrale della funzione f sull'intervallo $[a,b]$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k}) \frac{(b-a)}{n}$$

dove, per ogni n e per ogni $k = 1,2,\ldots,n$, $x_{n,k}$ è un qualsiasi punto appartenente all'intervallino $[\frac{k-1}{n}(b-a), \frac{k}{n}(b-a)]$.

Indicheremo l'integrale con il simbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Se f è una funzione positiva, l'integrale $\int_a^b f(x)\,ds$ si può interpretare come l'area della regione piana compresa tra l'asse delle x e il grafico della funzione f.

È possibile definire l'integrale anche per funzioni che non sono continue.

• Primitiva di una funzione. Sia $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo. Supponiamo che esista una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. Diremo allora che F è una primitiva di f.

• Il Teorema fondamentale del calcolo. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si può dimostrare che, se f è continua, allora esiste una primitiva F di f. Inoltre si ha $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.