

Esercizi su stabilità di sistemi dinamici a tempo discreto

Fabbroni di Lyapunov

Teorema di Lyapunov per sistemi LTI
Analisi degli autonoli

Sistemi dinamici

29/2020/2021

Ex. 1

Dato il sistema LTI a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Studiare la stabilità del sistema.

I° modo: analisi degli autovalori della matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 - \frac{1}{2}$$

autovalori

$$\lambda_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad |\lambda_2| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

Dunque il sistema è instanciamente stabile.

II° modo: utilizzo del teorema di Lyapunov

scelta Q simmetrica e def. positiva, si risolve

$$ATA - P = -Q$$

cerco P simmetrica e def. positiva

Se e solo se esiste l'isomorfismo c def. f.s. che risolve, allora il sistema c' è esattamente solubile

Segliendo $Q = I$ risulta

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & \bar{P} \\ \bar{P} & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & \bar{P} \\ \bar{P} & P_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

con $\begin{cases} P_1 > 0 \\ P_1 P_2 - \bar{P}^2 > 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & -\bar{P}_2 \\ -\frac{\bar{P}_1}{2} & -\frac{\bar{P}_1 + \bar{P}_2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P} \\ \bar{P} & \bar{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_2 & \bar{P}/2 \\ \frac{\bar{P}}{2} & \frac{\bar{P}_1 + \bar{P}_2}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P} \\ \bar{P} & \bar{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\bar{P}_2 - \bar{P}_1) & -\bar{P}_2 \\ -\bar{P}_1 & (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (P_2 - P_1) & -\bar{P}_2 \\ -\bar{P}_1 & (P_1 - P_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_2 - P_1 = -1 \\ -\bar{P}_2 = 0 \\ P_1 - P_2 = -1 \end{array} \right. \quad \not\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{P} = 0 \\ P_1 = P_2 + 1 \\ P_1 = -4 + 4P_2 \end{array} \right.$$

$$\bar{P} = 0$$

$$P_2 + 1 = 4P_2 - 4$$

$$P_1 = P_2 + 1$$

$$3P_2 = 5$$

$$P_2 = 5/3$$

$$P_2 = \sqrt{3} \quad P_1 = 1 + \sqrt{3} = \sqrt{3} \quad \bar{P} = 0$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

check:

$$P_1 > 0 \quad \checkmark$$

$$P_1 P_2 - \bar{P}^2 = \frac{40}{9} > 0 \quad \checkmark$$

\underline{P} è
simmetrica
e def. ps.

~~\underline{P}~~ sistema è esistenziale debole

Esercizio 2

Dato il sistema LTI a tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Studiare le stabilità del sistema.

I° modo: autorelati delle matrice A

$$P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 9$$

$$\lambda_2 = \pm 2 \quad |\lambda_2| > 1 \Rightarrow \text{Sistema instabile}$$

II° modo: utilizzo di una funzione di Lyapunov

NB con una funzione di Lyapunov è possibile stabilire se uno stato di equilibrio sia es. stabile, semp. stabile oppure instabile.

Quale è lo stato di equilibrio in precisione?

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad \text{grado} \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$V(x) = x^T P x$ è convessa se gli eie sono
lineari quadratici per
sfruttare l'eq. di Lyapunov

P simmetrica e definita pos.

$$P = I$$

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$V(0) = 0 \quad \text{e} \quad V(x) > 0 \quad \forall x \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Valevito $\Delta V(x) = -x^T Q x$

sfrutta
l'eq. di Lyapunov

$$P \equiv I$$

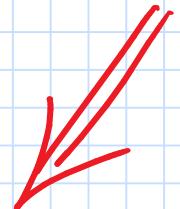
$$A^T A - I =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -Q$$

Ma allora $\Delta V(x)$ è def. positiva

~~se~~



lo stato di equilibrio è instabile.

Dato che il sistema è LT, l'instabilità dello stato d'equilibrio segue escluso direttamente (il solido su i sistemi LT) proprietà del sistema \Rightarrow sistema instabile //

[Es. 3]

Determinare le soluzioni
dello stato di equilibrio $\bar{x} = 0$

per il sistema

$$x(k+1) = \frac{1}{2}x(k) + \frac{2}{3}\sin[x(k)]$$

δ^0
modo

Utilizzo del sistema lineare

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{i,j=1}^{i=1, \dots, n} \quad j=1, \dots, m$$

$$m=1$$

$$A = Q = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}} = \left. \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cos x \right|_{x=0}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6}$$



$\alpha = \frac{\gamma}{\rho}$ \Leftrightarrow fluido autonolee ha
modulo > 1 !!



lo stato di equilibrio c' è insolito!

\mathbb{R}^0
modo

Utilese di una funzione di lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2} x^2$$

$$V(0) = 0$$

+

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

+

$$\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k))$$

$$x(k+1) \overset{\Rightarrow}{=} \frac{1}{2} x(k) + \frac{2}{3} \sin[x(k)]$$

$$\Delta V(x) = \left[\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} \sin x \right]^2 - \frac{1}{4}x^2$$

\downarrow
 $= \cancel{\frac{1}{4}x^2} + \frac{4}{3} \sin^2 x + \frac{1}{3}x \sin x - \cancel{\frac{1}{4}x^2}$

Intruffo in seni $\sin x \geq x$ (in un opportuno intorno di $\bar{x}=0$)

$$\Delta V(x) = \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow$$

def.
fattore.

Equilibrio instabile!

E. 9 |

Il sistema descritto dall'equazione

$$x(k+1) = x(k) [x(k) - 1]$$

ha 2 stati di equilibrio.

Analizzare la stabilità di ciascuno
dei 2 stati d'equilibrio

Stati di equilibrio

$$\bar{x} = \bar{x}(\bar{x} - 1)$$

$$\bar{x}^2 - 2\bar{x} = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \bar{x}_2 = +2$$

2 stati
di
equilibrio

Analisi di soluzioni

Primo: utilizzo del sistema lineare

$$A = \frac{df}{dx} \Big|_{\bar{x}} = I(\bar{x} - 1) + \bar{x} = 2\bar{x} - 1$$

$$A_1 = -1 \quad \bar{x} = 0$$

$$A_2 = +3 \quad \bar{x} = 2$$

$f_1 = -1$ \leftarrow modulo 1 \rightarrow non si puo'
dice nulla
sulla stabilita'

$f_2 = +3$ \leftarrow modulo > 1 \Rightarrow stato di
equilibrio
INSTAGNE !

I^o modo: utilizzo di una funzione di Lyapunov

Sia $V(x) = x^2$

I^o stato di equilibrio $\bar{x}_1 = 0$

$$V(\bar{x}_1) = 0 \quad \text{f}$$

$V(x) > 0 \quad \text{f} \quad x \neq \bar{x}_1$, in un opportuno
intorno di \bar{x}

$$\Delta V = V(x(k+1)) - V(x(k)) \longrightarrow$$

$$\Delta V = \left[x(x-1) \right]^2 - x^2$$

↗

$$x(k+1) = x(k) [x(k) - 1]$$

$$\Delta V = x^4 + x^2 - 2x^3 - x^2 = -2x^3 + x^4$$

für $x!$ $0 < |x| < 1 \Rightarrow 2x^3 \gg x^4$

$$\Delta V < 0$$

Per conclusione: $\bar{x}_1 = 0$ è stato di equilibrio stabile

2° stato di equilibrio $\bar{x}_2 = +2$

$$V(x) = (x-2)^2$$

$$V(\bar{x}_2) = 0 \neq$$

$V(x) > 0 \neq x \neq \bar{x}_2$ in un'offerta infondata

$$\Delta V = [x(k+1) - z]^2 - [x(k) - z]^2$$

$$= [x(x-1) - z]^2 - (x - z)^2$$

↗ $x^2 - x - z$

$$x(k+1) = x(k) [x(k) - 1]$$

$$\Delta V = (x+2)^2 + x^4 - 2x^2(x+2) - (x-2)^2 \Rightarrow$$

$$\Delta V = x^9 + x^2 + 4x + 4 - 2x^3 - 2x^2 - x^2 + 4x - 4$$

$$= 8x - 2x^2 - 2x^3 + x^4$$

die rechte?

in um einsetzen die $\bar{x}_2 + x = \bar{x}_2 + \delta = 2 + \delta$

$$\delta \in \mathbb{R} : |\delta| \ll 1$$

$$\Delta V = 8(2+\delta) - 2(2+\delta)^2 - 2(2+\delta)^3 + (2+\delta)^4$$

$$= \underline{\underline{\delta}}$$

$$\Delta V \geq 16 + 8\delta - 8 - 8\delta - 16 - 24\delta + 16 + 32\cdot\delta$$

$|\delta| < 1$ + tesserà TUTTE le

frazioni di δ con esponente
 > 1

$$8(1+\delta) > 0$$

x_2 è stato

$$|\delta| < 1$$

di equilibrio
in sovrappiù!