PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2019/2020

24 settembre 2020

Nome e Cognome:	
gruppo:	Gruppo unico
esercizio:	Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema dinamico lineare **a tempo discreto**

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -\frac{1}{10}x_1(k) + 8x_2(k) + \frac{1}{3}\,u_1(k) - \frac{2}{9}\,u_2(k) \\ x_2(k+1) &= \frac{1}{2}x_2(k) + u_2(k) \\ y(k) &= 3x_1(k) - 2\,x_2(k) + 12\,u_1(k) \end{aligned}$$

Domanda 1.1

Si individui una funzione **quadratica** di Lyapunov $V(x_1, x_2)$ che permetta di provare la stabilità asintotica del sistema, e che inoltre sia tale che la differenza prima rispetto al tempo $\Delta V(x_1, x_2)$ soddisfi le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \Delta V(1,0) &\leq -9 \\ \Delta V(0,1) &\leq -16 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Risposta 1.1}}$ Matrice A del sistema LTI a tempo discreto

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 8 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Della $V(x_1, x_2)$ conosciamo

$$\Delta V = -x^T Q x \quad \longleftrightarrow$$

dalla dimostrazione del Teorema di Lyapunov per sistemi lineari

e sappiamo che deve essere:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & \bar{q} \\ \bar{q} & q_{22} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} q_{11} \leq +9 \\ q_{22} \leq +16 \end{array}$$

def. positiva

per es. $q_{11} = +9 \quad \bar{q} = 0$
$q_{22} = +16$

Allora $V(x_1, x_2)$ è $x^T P x$ con P soluzione di

$$A^T P A - P = -Q$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 0 \\ 8 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 8 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} +$$

$$- \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} p_1 > 0 \\ p_1 p_2 - p_3^2 > 0 \end{cases}$$

Risolvendo si arriva a

$$\begin{bmatrix} 9-\frac{99}{100}P_1 & -\frac{4}{5}P_1-\frac{21}{20}P_3 \\ -\frac{4}{5}P_1-\frac{21}{20}P_3 & 64P_1-\frac{3}{4}P_2+8P_3+16 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de ai

$$9-\frac{99}{100}P_1=0 \longrightarrow P_1=\frac{9\cdot 100}{\cancel{99}\,11}=\frac{100}{11} \simeq 9{,}0909\ldots$$

$$\frac{4}{\cancel{5}_1}\cdot\frac{\overset{20}{\cancel{100}}}{11}+\frac{21}{20}P_3=0 \longrightarrow P_3=-\frac{80}{11}\cdot\frac{20}{21}=-\frac{1600}{231} \simeq -6{,}9264$$

$$64P_1-\frac{3}{4}P_2+8P_3+16=0$$

$$64\cdot\frac{100}{11}+8\left(-\frac{1600}{231}\right)+16=\frac{3}{4}P_2$$

$$P_2=\frac{4}{3}\left[16+\frac{6400}{11}-\frac{12800}{\underset{11\cdot 21}{231}}\right]$$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{16\cdot 11\cdot 21+6400\cdot 21-12800}{11\cdot 21}\right]=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{125296}{231}=\frac{501184}{693}$$

$$\simeq 723{,}2092$$

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 9,\overline{09} & -6,9264 \\ -6,9264 & 723,2052 \end{bmatrix}$$