

PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2019/2020

24 settembre 2020

Nome e Cognome:

gruppo: Gruppo unico

esercizio: Esercizio 1

Note: Scrivere le risposte su un singolo foglio bianco usando penna nera. Non scrivere con inchiostro blu o a matita. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Dichiaro che le risposte a questo esercizio sono frutto del mio e solo del mio lavoro e che non mi sono consultato con altri.

Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema dinamico lineare **a tempo discreto**

$$x_1(k+1) = -\frac{1}{10}x_1(k) + 8x_2(k) + \frac{1}{3}u_1(k) - \frac{2}{9}u_2(k)$$

$$x_2(k+1) = \frac{1}{2}x_2(k) + u_2(k)$$

$$y(k) = 3x_1(k) - 2x_2(k) + 12u_1(k)$$

Domanda 1.1

Si individui una funzione **quadratica** di Lyapunov $V(x_1, x_2)$ che permetta di provare la stabilità asintotica del sistema, e che inoltre sia tale che la differenza prima rispetto al tempo $\Delta V(x_1, x_2)$ soddisfi le seguenti condizioni:

$$\Delta V(1, 0) \leq -9$$

$$\Delta V(0, 1) \leq -16$$

Risposta 1.1 | Matrice A del sistema LTI e tempo diretto

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Della $V(x_1, x_2)$ consideriamo

$$\Delta V = -x^T Q x$$

→ dalla dimostrazione del Teorema di Lyapunov per sistemi lineari

e sappiamo che deve essere:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & \bar{q} \\ \bar{q} & q_{22} \end{bmatrix} \text{ con } q_{11} \leq +9$$

def. positiva

$$q_{22} \leq +16$$

$$\text{può essere } q_{11} = +9 \quad \bar{q} = 0 \\ q_{22} = +16$$

Allora $V(x_1, x_2)$ è $x^T P x$ con P definita

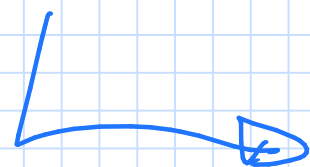
$$A^T P A - P = -Q$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 0 \\ 8 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} +$$

$$- \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3 & P_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} P_1 > 0 \\ P_1 P_2 - P_3^2 > 0 \end{cases}$$

Risolvendo si arriva a



$$\begin{bmatrix} 9 - \frac{39}{100} P_1 & -\frac{4}{5} P_1 - \frac{21}{20} P_3 \\ -\frac{4}{5} P_1 - \frac{21}{20} P_3 & 64 P_1 - \frac{3}{7} P_2 + P_3 + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de cui

$$9 - \frac{39}{100} P_1 = 0 \rightarrow P_1 = \frac{9 \cdot 100}{39} = \frac{100}{11} \approx 9,0909 \dots$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{100}{11} + \frac{21}{20} P_3 = 0 \rightarrow P_3 = -\frac{80}{11} \cdot \frac{20}{21} = -\frac{1600}{231} \approx -6,9269$$

$$64 P_1 - \frac{3}{7} P_2 + P_3 + 16 = 0$$

$$64 \cdot \frac{100}{11} + P_3 - \frac{3}{7} P_2 + 16 = 0$$

$$P_2 = \frac{4}{3} \left[16 + \frac{6400}{11} - \frac{12800}{231} \right]$$

$$= \frac{4}{3} \left[\frac{16 \cdot 11 \cdot 21 + 6400 \cdot 21 - 12800}{11 \cdot 21} \right] =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{125296}{231} = \frac{501184}{693}$$

$$\approx 723,2052$$

$$V(x_1, x_2) = [x_1 \ x_2] P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 3,05 & -6,9264 \\ -6,9264 & 723,2052 \end{bmatrix}$$
