

13 Novembre

Esempio $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ in $[0, 4]$

Trover e punti di max ass. e di min. ass. che esistono perchè $f \in C^0([0, 4])$

Eventuali punti di max/min assoluti contenuti all'interno di $[0, 4]$ sono punti critici.

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$x = 2, 3$ sono gli zeri.

Quindi i candidati sono

$0, 2, 3, 4$.

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 28, \quad f(3) = 27$$

$$f(4) = 32.$$

0 pt di min ass, 4 pt di max ass.

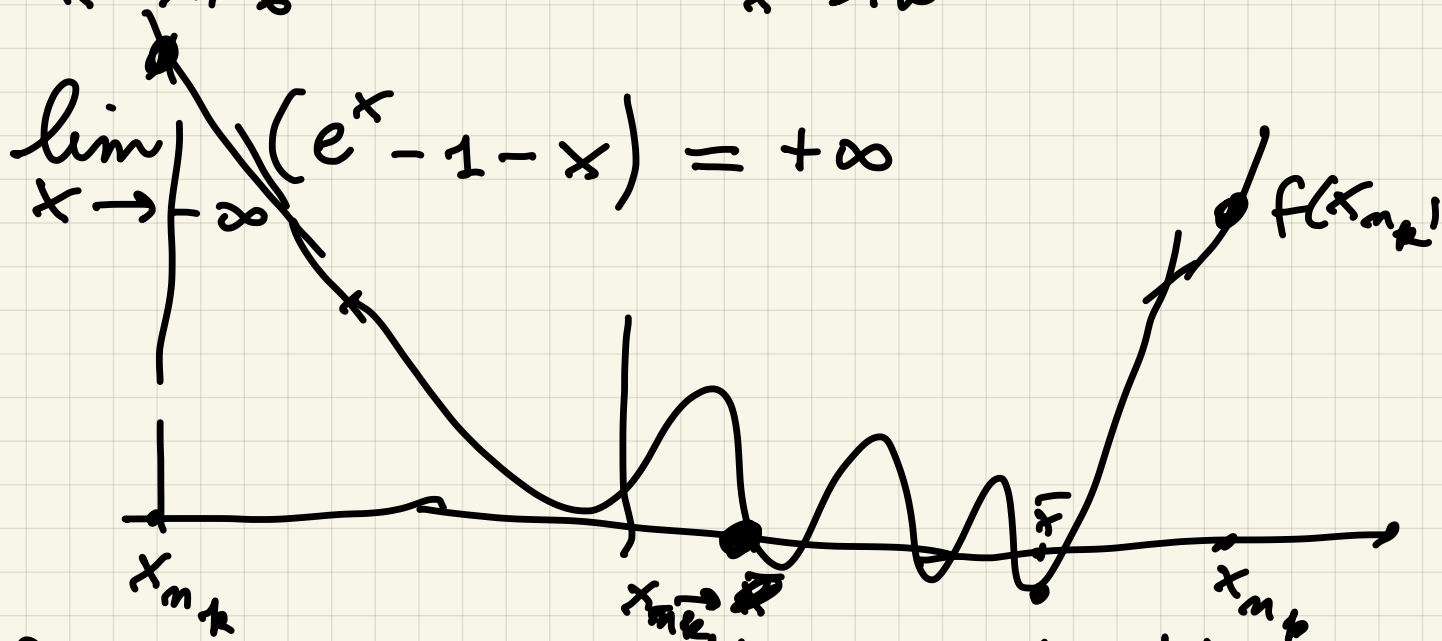
Esempi Dimostrare che $1+x \leq e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}$ e che $1+x < e^x$ per $x \neq 0$.

Quindi siamo considerando la funzione $f(x) = e^x - 1 - x$ e vogliamo dimostrare che $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$, cioè che 0, dove $f(0) = 0$, è l'unico punto di minimo assoluto.

Ovviamente $f \in C^0(\mathbb{R})$, e in

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$



Quindi $f(x)$ ammette punti di minimo assoluto che devono essere punti critici.

$$f(x) = e^x - 1 - x$$

$$f'(x) = e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1$$

$$x = \ln 1 = 0$$

0 è l'unico punto critico

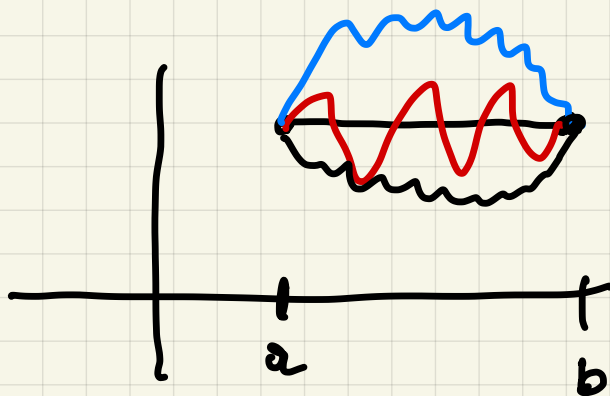
Deve essere l'unico punto di minimo
assoluto. Pertanto $f(x) > f(0) = 0$

$$\forall x \neq 0.$$

Lemma (Rolle) Sia $f \in C^0([a,b])$ e derivabile in (a,b) e sia $f(a) = f(b)$

Allora esiste un $c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = 0$$



Dim Se $f \equiv C$ allora allora $f' \equiv 0$.
Se f non è costante non è restrittivo
assumere che $\exists x_0 \in (a,b)$ t.c.

$$f(x_0) < f(a) = f(b).$$

Allora, se x_m è un punto di minimo assoluto, da

$$f(x_m) \leq f(x_0) < f(a) = f(b)$$

segue che $x_m \in (a,b)$. Per

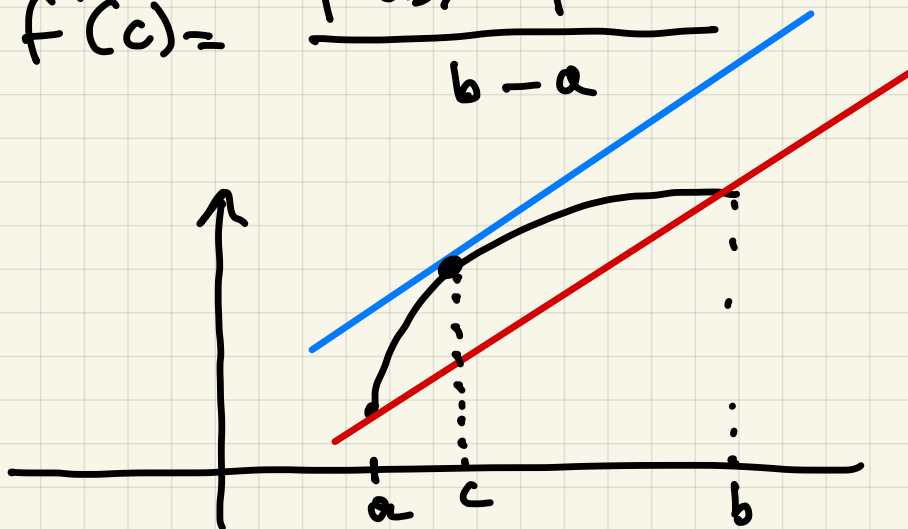
$$\text{Fermat } f'(x_m) = 0.$$

$$c = x_m.$$

Teor Sia $f \in C^0([a, b])$, derivabile in (a, b) .

Allora $\exists c \in (a, b)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Dim Introduzione

$$F(x) = f(x) - \alpha x$$

in modo tale che $F(a) = F(b)$.

$$f(a) - \alpha a = f(b) - \alpha b$$

$$\alpha(b - a) = f(b) - f(a)$$

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x$$

$$F \in C^0([a, b]), \quad F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \forall x \in (a, b)$$

Per Rolle esiste $c \in (a, b)$ t.c.

$$F'(c) = 0$$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \square$$

Esercizi Sia $f \in C^0(I)$, I un intervallo
e sia f differenziabile all'interno di I .
Allora sono equivalenti

- 1) f è una funzione costante in I .
- 2) $f'(x) = 0 \quad \forall x$ all'interno di I .

Esercizio Sia $f \in C^0(I)$, f differenziabile
all'interno di I . Allora sono
equivalenti

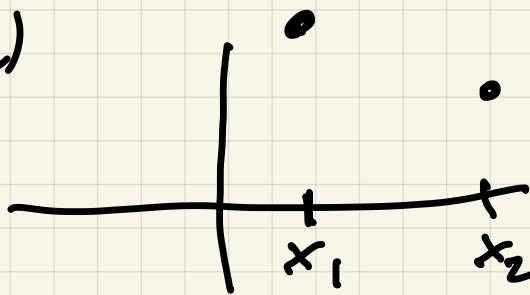
1) f è crescente in I

2) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x$ all'interno
di I .

Dim 2) $\Rightarrow$ 1)

Se verifichiamo forse l'implicazione
forse falso esisterebbe una f
con $f'(x) \geq 0 \quad \forall x$ interno ad I
ed $f(x)$ non crescente e cioè t.c.

$\exists x_1 < x_2$ in I con
 $f(x_1) > f(x_2)$



$$[x_1, x_2] \subseteq I$$

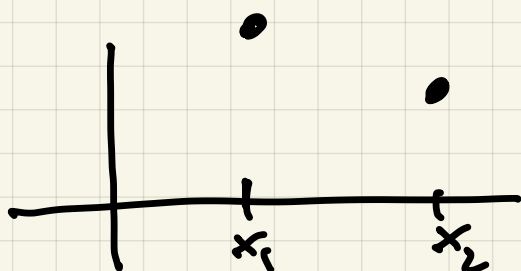
$(x_1, x_2) \subseteq \overset{\circ}{I}$ (l'insieme dei punti
interni di I)

In particolare $f \in C^0([x_1, x_2])$
e $f'(x)$ esiste $\forall x \in (x_1, x_2)$.

Posso applicare Lagrange: $\exists c \in (x_1, x_2)$
 $t.c.$

$$0 \leq f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

Assurdo.



$$1 \Rightarrow 2$$

Partiamo da $f \in C^0(I)$, differenziabile
in $\overset{\circ}{I}$. Allora f crescente in I
 $\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{I}$.

Se per assurdo l'implicazione $1 \Rightarrow 2$
fosse falsa esisterebbe una f
crescente in I con $f'(c) < 0$
in un punto $c \in \overset{\circ}{I}$.

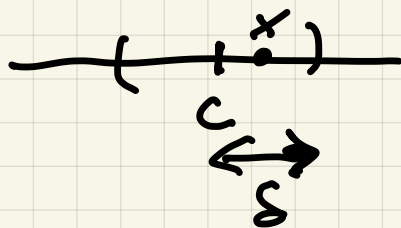
$$0 > f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

E' facile verificare che $\exists \delta > 0$

$$\text{t.c. } 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$$

Se prendiamo in
particolare $c < x < c + \delta$



$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(c) < 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) < f(c).$$

Concludiamo che per $c < x < c + \delta$
si ha $f(x) < f(c) \leq f(x)$

$$\Rightarrow f(x) < f(x) \text{ Assurdo.}$$

Teor Sia $f: X \setminus \{\bar{x}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X'$.

Allora se $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L > 0$

$\exists \delta > 0$ t.c. $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ e $x \in X$

$$\Rightarrow f(x) > 0.$$

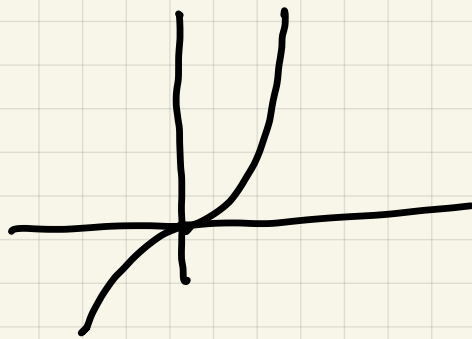
Esercizio Sia $f \in C^0(I)$, differenziabile
in $\overset{\circ}{I}$. Dimostrare che se $f'(x) > 0 \quad \forall$
 $x \in \overset{\circ}{I}$ allora f è strettamente crescente
in I .

Stabilire se è vero il viceversa, cioè
che se f è strettamente crescente in I
implichi che $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \overset{\circ}{I}$

2° parte è falso. Esempio

$f(x) = x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$

ma $f'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$



Teor (Cauchy) Siano $f, g \in C^0([a, b])$

differenziabili in (a, b) e sia $g'(x) \neq 0$

$\forall x \in (a, b)$. Allora $\exists c \in (a, b)$ t.c.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

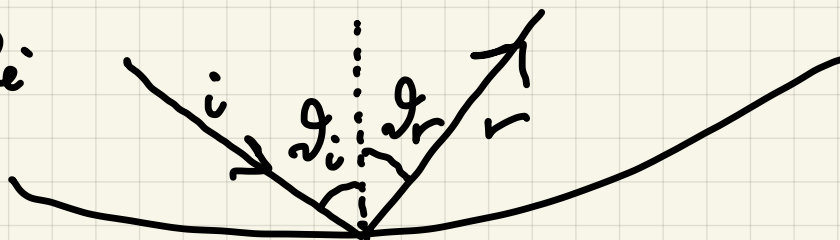
Nota Nel caso $g(x) \equiv x$ allora
Cauchy diventa Lagrange

Ottica geometrica

1) All'interno di un mezzo omogeneo
la luce si propaga lungo retto

Legge della riflessione Consideriamo un raggio
di luce che incide su uno specchio e
viene riflesso. Allora l'angolo di
riflessione e l'angolo di incidenza
sono uguali

$$\theta_i = \theta_r.$$



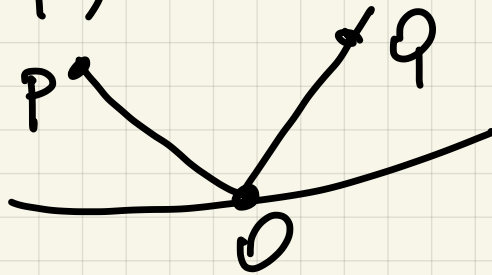
La dimostrazione si basa sul principio di Fermat:

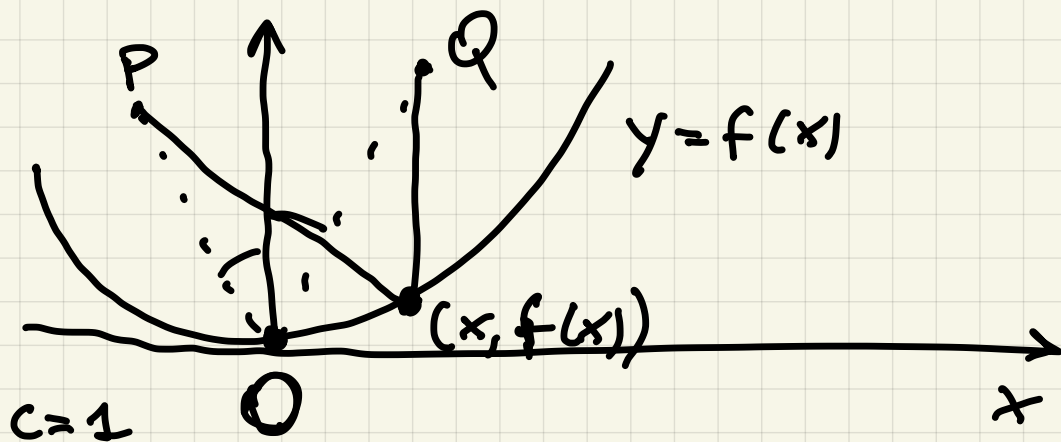
Presi P e Q

P sul raggio incidente e Q

sul raggio riflesso, la traiettoria della luce deve essere quella che minimizza il tempo di percorrenza da P e Q ,

$$T = \frac{\overline{PO} + \overline{OQ}}{c}$$





$$T(x) = \frac{1}{c} \left(\sqrt{(x-x_P)^2 + (f(x)-y_P)^2} + \sqrt{(x-x_Q)^2 + (f(x)-y_Q)^2} \right)$$

$$T'(0) = 0$$

$$T'(x) = \frac{x-x_P + f'(x)(f(x)-y_P)}{\sqrt{(x-x_P)^2 + (f(x)-y_P)^2}} + \frac{x-x_Q + f'(x)(f(x)-y_Q)}{\sqrt{(x-x_Q)^2 + (f(x)-y_Q)^2}}$$

$$T'(0) = \frac{-x_P}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}} - \frac{x_Q}{\sqrt{x_Q^2 + y_Q^2}} = 0$$

$\underbrace{\sin(\vartheta_i)}_{\sin(\vartheta_r)} = \sin(\vartheta_r)$

$$\vartheta_i = \vartheta_r$$