ESERCIZI DI GEOMETRIA, FOGLIO 5

Trieste, 14 novembre 2020

1. Considerare la seguente applicazione lineare $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+2y+z \end{pmatrix}$$
   (a) Scrivere la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(T)$ che rappresenta T nelle basi
$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{di } \mathbb{R}^3 \text{ e } \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{di } \mathbb{R}^2.$$
   (b) Determinare il rango, una base dell'immagine, e una base del nucleo di T.

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ l'applicazione lineare rappresentata dalla seguente matrice A rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare il rango di f e la dimensione del nucleo di f;
   (b) trovare una base per il nucleo e una base per l'immagine di f;
   (c) stabilire per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ $(-2, h, h^2) \in Im(f)$.

3. Due matrici $m \times n$ A, B sono dette *equivalenti per righe* se si può passare da A a B con trasformazioni elementari sulle righe.
   a) Dimostrare che ogni matrice A è equivalente per righe a una matrice a gradini A_1 con tutti i pivot uguali a 1.
   b) Dimostrare che A_1 è equivalente per righe a una matrice a gradini A_2 con tutti i pivot uguali a 1, e tale che tutti gli elementi che stanno nella colonna di un pivot, eccetto il pivot, sono nulli.
   Una matrice della forma di A_2 è detta a gradini in forma ridotta per righe.

4. Siano V, W K-spazi vettoriali di dimensione finita, $f : V \to W$ un'applicazione lineare.
   Dimostrare che, se f è iniettiva, esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $g \circ f = id_V$, mentre se f è suriettiva, esiste un'applicazione lineare $g : W \to V$ tale che $f \circ g = id_W$. (Suggerimento: usare i teoremi di completamento a una base e della determinazione di un'applicazione lineare.)