Diremo che f è continua in un intervallo chiuso $[a,b]$ se f è continua in $]a,b[$ e se $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Se f e g sono funzioni continue in x_0 (punto interno di Dom f e di Dom g) allora risultano continue in x_0 anche le funzioni $f+g$ $f \cdot g$ e f/g

$\boxed{\text{qualora } g(x_0) \neq 0}$

Prop Supponiamo f continua in x_0:
e supponiamo g sia una funzione continua in $f(x_0) = y_0$ e tale che si possa definire la funzione composta $g \circ f = h$

Allora h è continua in x_0.

$$
\begin{tikzcd}
\underset{\mathrm{Dom}\, f}{(\; \overset{\circ}{x_0} \;)} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & \underset{\mathrm{Dom}\, g}{(\; \cdot\, f(x_0) = y_0 \;)} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

"Dim"

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{\substack{y \to y_0 \\ x \to x_0}} g(\overset{\overset{y}{\shortparallel}}{f(x)}) = \underbrace{g[\overset{\overset{y_0}{\shortparallel}}{f(x_0)}]}_{g \text{ è continua}} = \underbrace{h(x_0)}$$

$f(x) \to f(x_0)$

perché f è continua

Teorema di Weierstrass

Sia f continua in un insieme CHIUSO e LIMITATO K

Allora $\exists$ $x_m \in K$ e $x_M \in K$ tali che

$$\underbrace{m = f(x_m)}_{\text{minimo di } f \text{ in } K} \leq f(x) \leq \underbrace{f(x_M) = M}_{\text{massimo di } f \text{ in } K} \quad \forall x \in K$$

x_m: punto di minimo per f in K

x_M: punto di massimo per f in K

m: valore minimo

M: valore massimo

Conseguenze

Teorema (dei valori intermedi) o (di Darboux)

Sia f continua nell'intervallo chiuso e limitato K. (Per il Teorema di Weierstrass $\exists\, x_m, x_M$

$$f(x_m) = m \le f(x) \le M = f(x_M) \quad \forall x \in K \quad)$$

Preso $y_0 \in [m, M]$, $\exists\, x_0 \in K$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Teorema Esistenza degli Zeri

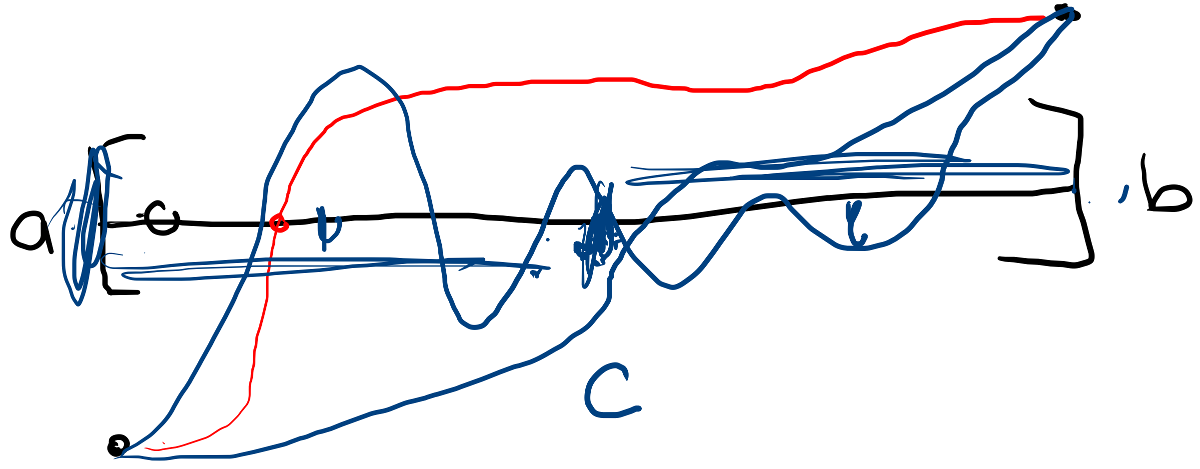
Sia f continua in $[a,b]$ (intervallo chiuso e limitato)

Se $f(a)\cdot f(b) \leq 0$, allora $\exists\ x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0)=0$

<u>Dim</u> Se $f(a)=0$ o $f(b)=0$ il Teorema è dimostrato.

Altrimenti $f(a)\cdot f(b)<0$.

Possiamo supporre $f(a)>0$ $f(b)<0$.



$f(a)>0$ $\qquad$ $f(b)<0$

$$c = \frac{b+a}{2}$$

$$f(c) = \begin{cases} 0 & \checkmark \text{ FINE} \\ >0 \\ <0 \end{cases}$$

Se $f(c)>0 \Rightarrow c=a_1 \quad b=b_1$

Se $f(c)<0 \Rightarrow c=b_1 \quad a=a_1$

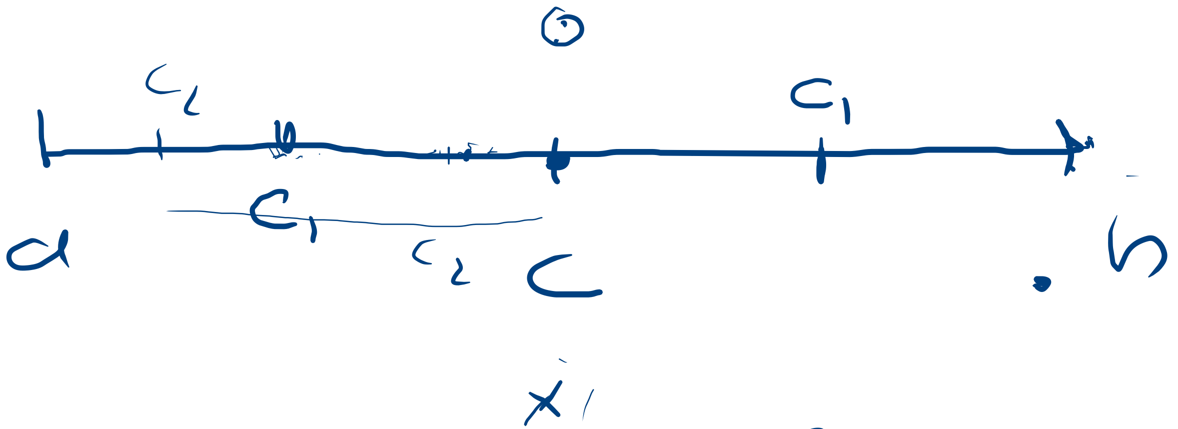
In entrambi i casi $f(a_1)>0$ e $f(b_1)<0$.

Passo successivo:

considero $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ $\qquad$ $f(c_1) = \begin{cases} 0 & \checkmark \text{ FINE} \\ >0 \\ <0 \end{cases}$

Se $f(c_1) > 0 \Rightarrow c_1 = a_2 \qquad b_1 = b_2$

Se $f(c_1) < 0 \Rightarrow c_1 = b_2 \qquad a_1 = a_2$



Procedendo, ottengo 3 successioni di numeri reali

$a = a_0 \qquad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$c_0 = c \qquad b_0 = b$

Tali successioni sono limitate in quanto contenute in $[a,b]$; inoltre

Inoltre, per costruzione, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona non decrescente, ossia

$$a_{n+1} \geq a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

mentre $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona non crescente, cioè

$$b_{n+1} \leq b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si osservi poi che, sempre per costruzione, risulta

$$a_n \leq c_n \leq b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (6)$$

•• $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

••• $f(a_n) > 0 \qquad f(b_n) < 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Per la provata monotonia di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entrambe le successioni sono convergenti, con

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l_a \in \mathbb{R} \quad \left[l_a \in [a,b] \right] \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = l_b \in [a,b]$$

Inoltre da •• risulta che $\boxed{l_a = l_b}$

Infatti che $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

risulta che $l_b - l_a$

$$\boxed{l_a = l_b = x_0}$$

Allora che $\odot$ $a_n \le c_n \le b_n$

risulta che $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x_0 \in [a,b]$

Da (...) sappiamo che $f(a_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$f(b_n) < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

per la continuità di f
in $[a,b]$

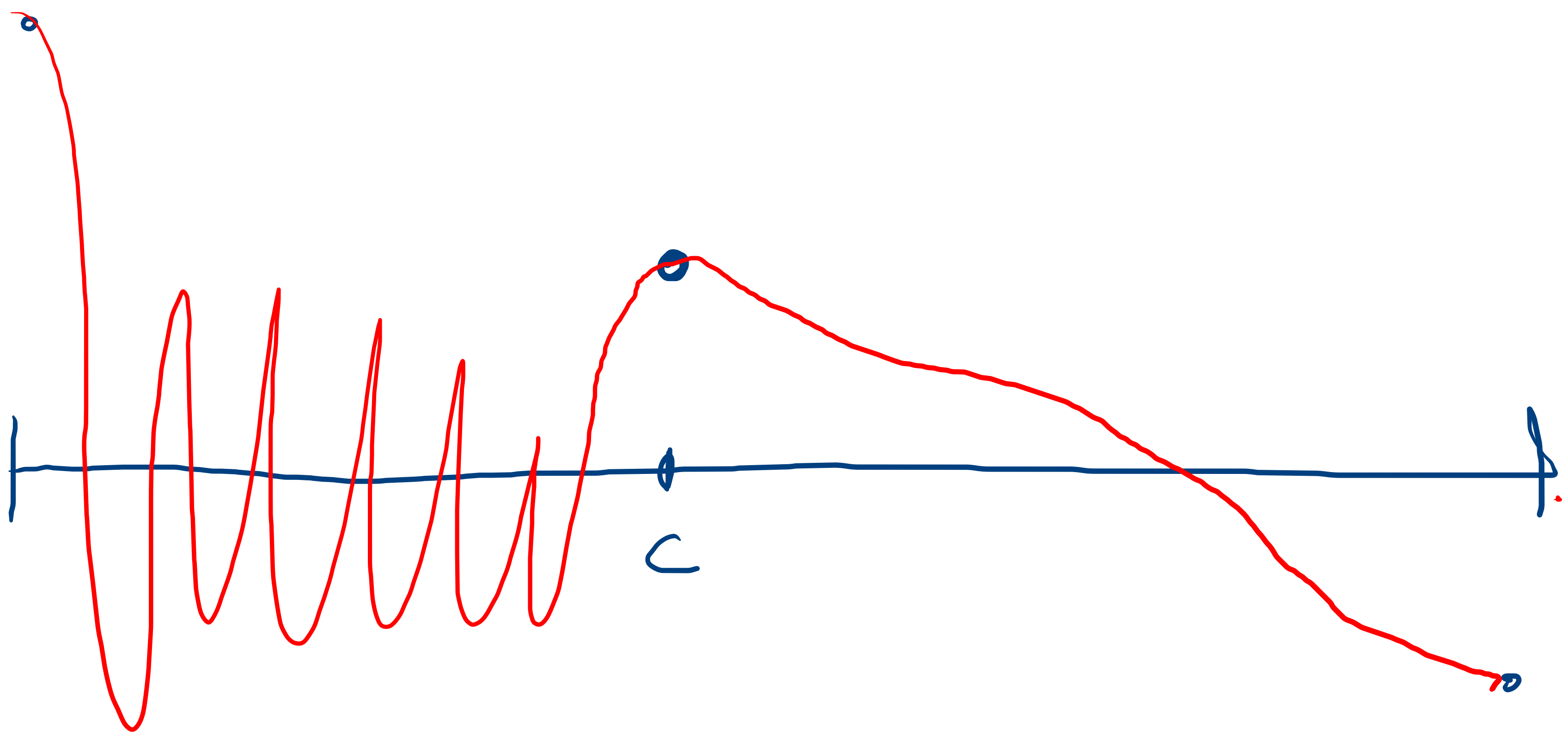
$\Longrightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x_0) \geq 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x_0) \leq 0$$

$\Longrightarrow f(x_0) = 0$

$\square$



$f(x) = y_0$

$\boxed{g(x) = \underline{f(x) - y_0}}$

Sia $y_0 \in [m, M]$ con $m = f(x_m)$
$M = f(X_M)$

$m \leq y_0 \leq M$

Consideriamo

rispettivamente minimo e Massimo di f in K chiuso e limitato (f continua in K)

$g(x) := f(x) - y_0$

g è continua in K.

Inoltre $g(x_m) = f(x_m) - y_0 = m - y_0 \leq 0$

$g(x_M) = f(x_M) - y_0 = M - y_0 \geq 0$

poiché $y_0 \in [m, M]$

Allora, applico il Teorema di esistenza degli zeri alla funzione g (continua in K) sull'intervallo di estremi x_m e x_M.

chiuso e limitato

$\subseteq K$

Infatti $g(x_m) \cdot g(x_M) \leq 0$

$\exists$ x_0 in K tale che $g(x_0)=0$

Poiché $g(x_0) = f(x_0) - y_0 = 0$

risulta anche che $f(x_0) = y_0$ ✓

Sia f una funzione reale di variabile reale definita in un insieme $U \subseteq \mathbb{R}$ (aperto)

Diremo che $x_0 \in U$ è un PUNTO di MASSIMO LOCALE (MINIMO) per f, se $\exists$ un intorno di x_0 in U, sia esso I_{x_0}, tale che $\forall x \in I_{x_0}$ risulta $f(x) < f(x_0)$.
$(>)$