

17 Novembre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Prov' in generale $\forall b > 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{b^x} = 0 \quad \text{Conclusione}$$

Per $x \gg 1$ si ha $b^x \gg x^n$

per ogni prefissato $b > 1$ e $n \in \mathbb{N}$

In fatti, ancora più in generale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^A}{b^x} = 0 \quad \forall A > 0 \text{ e } \forall b > 1.$$

$$0 < \frac{x^A}{b^x} < \frac{x^{[A]+1}}{b^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$\epsilon > 0$ fissato

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\epsilon}{\log x} = +\infty$$

Questo è un limite $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\epsilon = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\epsilon \log x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$$

$$y = \epsilon \log x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\varepsilon}{\log x} \stackrel{\uparrow}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}{\cancel{x^{-1}}} = \varepsilon \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\varepsilon = +\infty$$

Conclusione $\forall$ fissato $\varepsilon > 0$

$\log x \ll x^\varepsilon$ se $x \gg 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left((x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cancel{2x}}$$

$$\frac{d}{dy} \left(y^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \qquad = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$y = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 1} y^{\frac{1}{2}} = 1$$

Def (derivata seconda) Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
t.c. $f'(x)$ esiste $\forall x \in (a, b)$. Sia $x_0 \in (a, b)$. Se
 $f'(x)$ ammette derivato nel punto x_0 ,

$(f')'(x_0)$ lo denotiamo con $f''(x_0) = f^{(2)}(x_0)$
 $= \frac{d^2}{dx^2} f(x_0)$, e lo chiamiamo derivato
secondo di $f(x)$ nel punto x_0 . Se $f''(x)$

esiste $\forall x \in (a, b)$ resta definito una nuova funzione,

$$\begin{aligned}\underline{E_1} \quad (e^{x^2})'' &= \left((e^{x^2})' \right)' = (e^{x^2} 2x)' = \\ &= 2 (x e^{x^2})' = 2 (e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}) = \\ &= 2 (1 + 2x^2) e^{x^2}\end{aligned}$$

Def (Derivato di ordine k) Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo aperto. Supponiamo di avere definito la derivato di ordine $k-1$, $\underline{f^{(k-1)}(x)} = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} f(x)$, $\forall x \in I$.

Allora se in un punto $x_0 \in I$ esiste la derivato della funzione $f^{(k-1)}(x)$, allora chiamiamo $\left(f^{(k-1)}\right)'(x_0)$ derivato di ordine k

di $f(x)$ nel punto x_0 e la derivata

$$\left(f^{(k-1)}\right)'(x_0) = f^{(k)}(x_0) = \frac{d^k}{dx^k} f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^k f(x).$$

Esempio $(e^x)^{(k)} = e^x$

$(e^x)' = e^x$, supponiamo che $(e^x)^{(k-1)} = e^x$
allora

$$(e^x)^{(k)} = \left((e^x)^{(k-1)} \right)' = (e^x)' = e^x.$$

Lemma $(\sin x)^{(k)} = (\sin x)^{(r)}$

dove r è il resto di $k : 4$.

Dim ~~non~~

$$(\sin x)^{(0)} = \sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)''' = (-\sin x)' = -\cos x$$

$$(\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x$$

$$(\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x$$

$$(\sin x)^{(4)} = (-\cos x)' = \sin x$$

$$(\sin x)^{(5)} = (\sin x)' = \cos x$$

$$(\sin x)^{(6)} = (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)^{(7)} = (-\sin x)' = -\cos x$$

$$\sin^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)}$$

$$(\cos x)^{(0)} = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$$

$$(\cos x)^{(3)} = (-\cos x)' = \sin x$$

$$\begin{cases} \cos^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x \\ \cos^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x \end{cases}$$

$$(\cos x)^{(4)} = (\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)^{(5)} = (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cos x)^{(6)} = (-\sin x)' = -\cos x$$

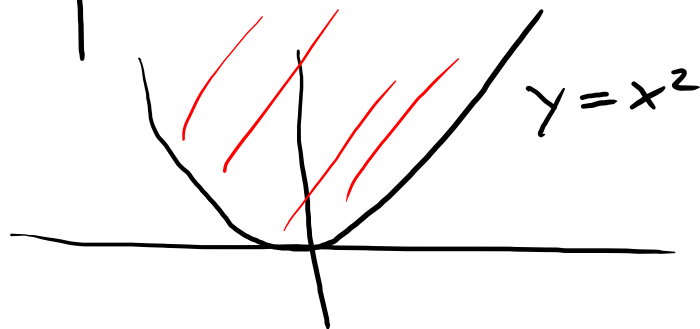
$$(\cos x)^{(7)} = (-\cos x)' = \sin x$$

Funzioni convexe

Esempi $f(x) = x$



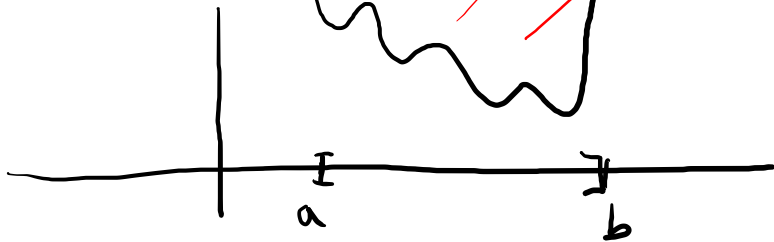
$$f(x) = x^2$$



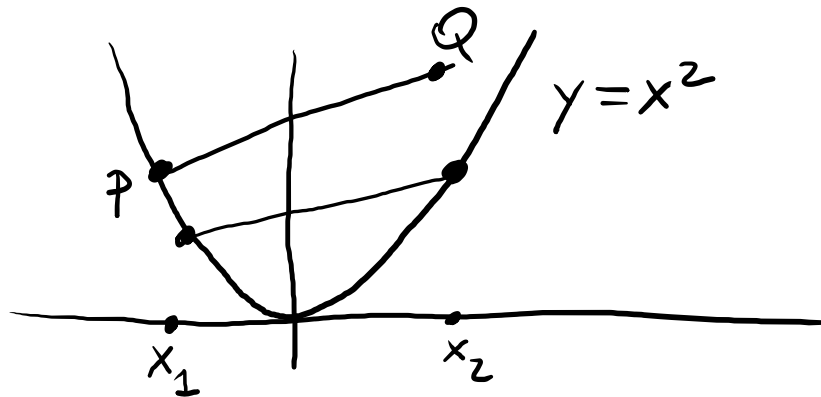
Definizione (1) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I un intervallo,
 si dice convessa se la regione del piano

$$X = \{ (x, y) : x \in I, y \geq f(x) \}$$

è convessa

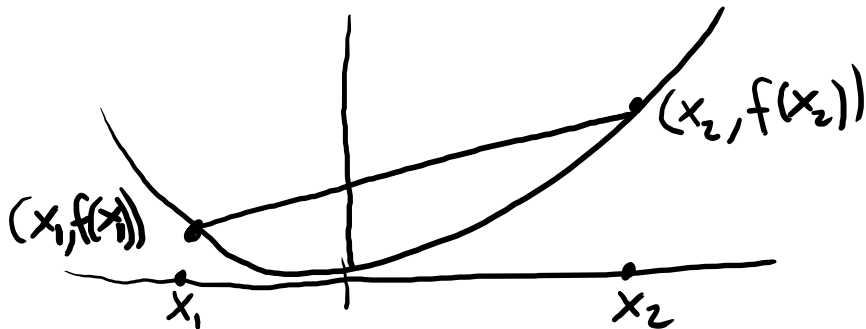


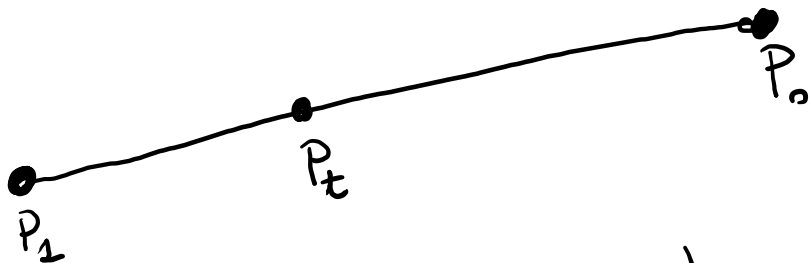
Cioè quando presi due punti qualsiasi $P, Q \in X$
allora X contiene anche il segmento nel piano
di estremi P e Q .



Def(2) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I un intervallo, e'
convesso se $\forall x_1, x_2 \in I$ si ha

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

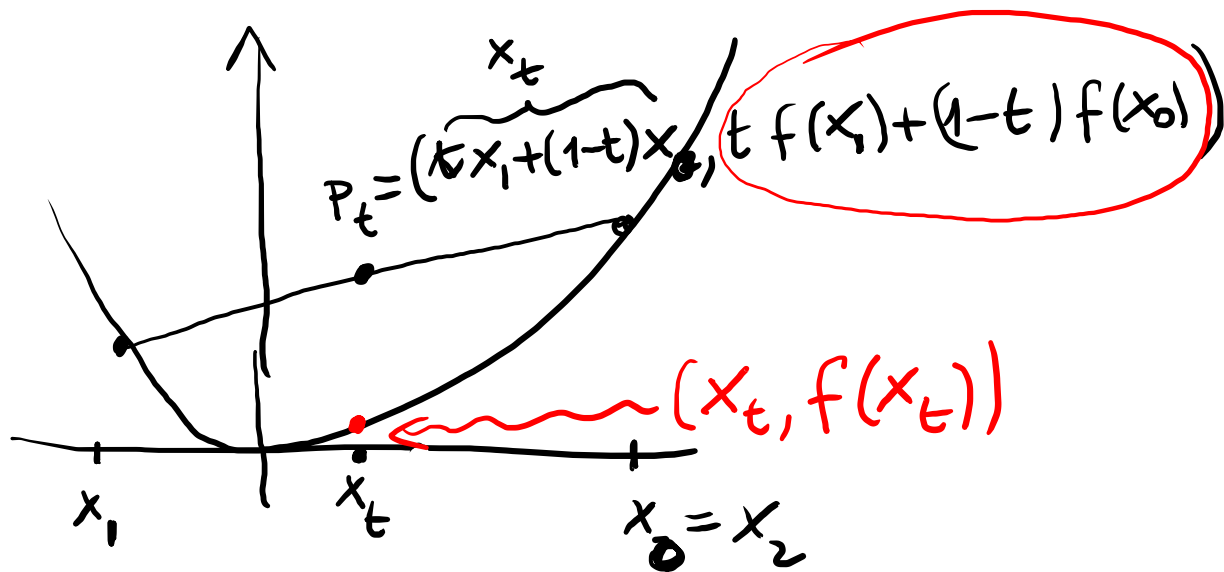


$(x_1, f(x_1))$ $(x_2, f(x_2))$ 

$$P_t = t(x_1, f(x_1)) + (1-t)(x_2, f(x_2))$$

$$t \in [0, 1]$$

$$P_t = (tx_1 + (1-t)x_2, tf(x_1) + (1-t)f(x_2))$$



$$f(x_t) = f(t x_1 + (1-t) x_0) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_0)$$

Teor Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I un intervallo

Sono equivalenti le seguenti proposizioni

1) f è convessa in I secondo Def 2

2) Per ogni $x_1 < y < x_2$ ho

$$\frac{f(x_1) - f(y)}{x_1 - y} \leq \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y}$$

$$x_1 < y < x_2$$

$$\frac{f(x_1) - f(y)}{x_1 - y} \leq \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y}$$

