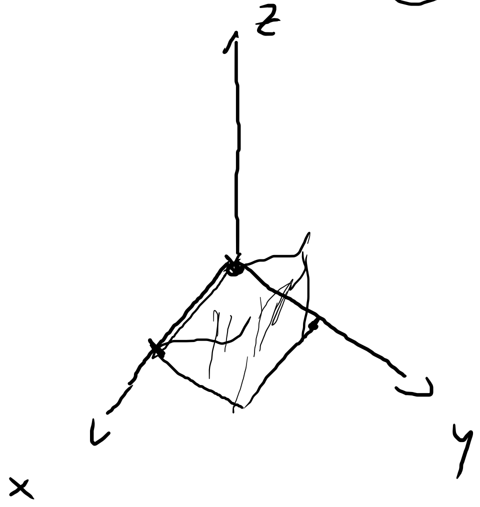
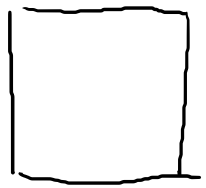
$$\underline{x\sqrt{4x^2+4y}-2z=0} \qquad x=0 \quad x=1 \quad y=0 \quad y=1 \quad z=0$$



$$z = x\sqrt{x^2+y}$$



$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} x\sqrt{x^2+y}\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 x\sqrt{x^2+y}\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \int_y^{1+y} \sqrt{u}\,du \right) dy = A$$

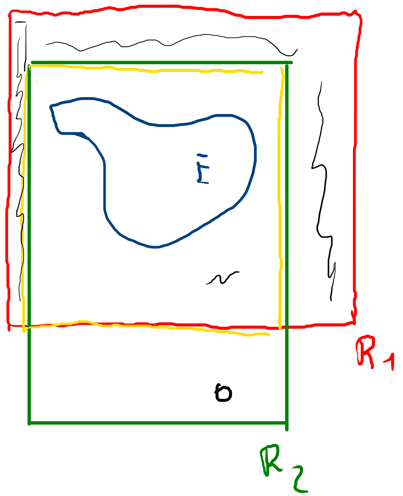
$$A = \int_0^1 \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_y^{1+y} dy = \frac{1}{3} \int_0^1 \left((1+y)^{3/2} - y^{3/2} \right) dy = \frac{1}{3} \frac{2}{5} \left[(1+y)^{5/2} - y^{5/2} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{15} \left(2^{5/2} - 1 - 1 \right) = \frac{2}{15} \left(\overset{\sim 4\cdot\sqrt{2}}{2^{5/2}} - 2 \right) = \frac{8\sqrt{2}-4}{15} \quad //$$

Integrazione su un insieme limitato

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ <u>un insieme limitato</u>. Sia $f : E \to \mathbb{R}$ limitata.

Fissiamo un rettangolo R contenente E.



Definiamo $f^*_R : R \to \mathbb{R}$

$$f^*_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in R \setminus E \\ f(x) & \text{se } x \in E \end{cases}$$

e in questo caso $\int_{R_1} f^*_{R_1}(x)\,dx = \int_{R_2} f^*_{R_2}(x)\,dx$,

OSSERVAZIONE: Siano R_1 e R_2 contenenti E. Si ha che $f^*_{R_1}$ è integrabile su R_1 se e solo se la funzione $f^*_{R_2}$ è integrabile su R_2. [Dim: considero $R_1 \cap R_2$

$$\int_{R_1} f^*_{R_1}(x)\,dx = 0 + \int_{R_1 \cap R_2} f^*_{R_1}(x)\,dx \qquad \text{[Per l'additività]}$$

$$\int_{R_2} f^*_{R_2}(x)\,dx = 0 + \int_{R_1 \cap R_2} f^*_{R_2}(x)\,dx$$

$$f^*_{R_1}(x) = f^*_{R_1 \cap R_2}(x) \quad \forall x \in R_1 \cap R_2$$

$$f^*_{R_2}(x) = f^*_{R_1 \cap R_2}(x) \quad \text{"} \quad]$$

Definizione E limitato, $f : E \to \mathbb{R}$ limitata.

Diremo che f è integrabile su E se, preso un rettangolo R contenente E, la funzione f_R^* è integrabile su R. Si pone in questo caso

$$\boxed{\int_E f \, dm = \int_R f_R^* \, dm}$$

⚠ Es: $f(x) \equiv 1$ $\quad f : E \xrightarrow{\subset \mathbb{R}} \mathbb{R}$ $\quad E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$

f non è integrabile su E!

$R \supset E$ $\quad R = [0,1]$ $\quad \int_0^1 f_R^* \, dx$ non esiste (f_R^* funzione di Dirichlet, non integrabile!)

Definizione Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ limitato. E si dice misurabile secondo Peano-Jordan se la funzione $f(x) = 1$ è integrabile su E. In questo caso si dice misura di E il numero

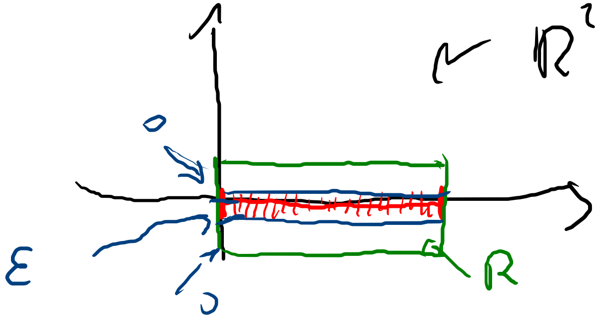
$$\boxed{m(E) = \int_E 1 \, dm} = \int_R f_R^*(x)\, dx \qquad \text{con } E \subseteq R \quad R \text{ rettangolo}$$

$m =$ lunghezza

Es: $E = [0,1] \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ non è misurabile secondo Peano-Jordan in $\mathbb{R}$.

⚠ L'insieme $A = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile secondo Peano-Jordan in $\mathbb{R}^2$ con $m(A) = 0$

$\mathbb{R}^2$ $m =$ area



$f_R^*(x,y) = \begin{cases} 0 & \dots \\ f & \dots \end{cases}$

$S(f_R^*, S) = 1 \cdot \underbrace{1 \cdot \varepsilon}_{m(R_{ij})}$

$s(f_R^*, S) = 0$

Proprietà dell'integrale (e della misura)

<u>Linearità</u> $\int_E (\alpha f + \beta g)\, dm = \int_R (\alpha f + \beta g)^*_R \, dm = \alpha \int_R f^*_R \, dm + \beta \int_R g^*_R \, dm =$

$(\alpha f + \beta g)^*_R = \alpha f^*_R + \beta g^*_R$

$= \alpha \int_E f\, dm + \beta \int_E g \, dm$

<u>Prodotto</u>

<u>Monotonia</u> $f \leq g$ su $E \Rightarrow \int_E f \, dm \leq \int_E g \, dm$

<u>Valore assoluto</u> $|f^*_R| = |f|^*_R$

⚠ <u>Restrizione</u> NON vale! Es: $f(x) = 1$ integrabile su $[0,1]$ ma NON è integrabile su $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Additività

f integrabile su E_1, f integrabile su E_2; allora

f è integrabile su $E_1 \cup E_2$ e su $E_1 \cap E_2$ e si ha

$$\underbrace{\int_{E_1 \cup E_2} f(x)\, dm} = \int_{E_1} f\, dm + \int_{E_2} f\, dm - \int_{E_1 \cap E_2} f\, dm$$

$$\boxed{f^*_{E_1 \cup E_1}(x)} \overset{?}{=} \boxed{f^*_{E_1}(x) + f^*_{E_2}(x) - f^*_{E_1 \cap E_2}(x)} \rightsquigarrow \text{linearità su } R$$

$x \in D$	0	$\overset{OK}{=}$	0	0	0
$x \in A$	$f(x)$	$\overset{OK}{=}$	$f(x)$	0	0
$x \in B$	$f(x)$	$\overset{OK}{=}$	0	$f(x)$	0
$x \in C$	$f(x)$	$\overset{OK}{=}$	$f(x)$	$+\ \cancel{f(x)}$	$\cancel{-}\ f(x)$

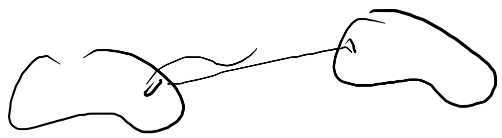
Per le misure si ha che

- $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2) - m(E_1 \cap E_2)$
- $m(E) \geq 0 \quad \forall\, E$ misurabile $\quad \left[\, 1 \geq 0 \Rightarrow \int 1 \geq \int 0 \,\right]$
- monotonia: $E_1 \subseteq E_2$ (E_1, E_2 misurabili) $\Rightarrow m(E_1) \leq m(E_2)$

$\left(1^*_{E_1}(x) \leq 1^*_{E_2}(x) \right)$

in $\mathbb{R}^N$ $\quad R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]$

- $m([a,b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c) \qquad m(R) = \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i)$
- invarianza per traslazioni $\quad E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile $\quad \alpha \in \mathbb{R}^N$



$E + \{\alpha\} = \{ x + \alpha : x \in E \}$ è misurabile e $m(E + \{\alpha\}) = m(E)$.

OSS: $E = \{x_0\}$ un punto; E è misurabile in $\mathbb{R}^n$ $\forall n \geq 1$

$m(E) = 0$

Un'unione numerabile di insiemi misurabili secondo Peano-Jordan è misurabile?

$\mathbb{Q} \cap [0,1]$ è numerabile ma NON è misurabile.

La misura di Peano-Jordan NON è una misura (perché non vale la proprietà di additività per famiglie numerabili di insiemi)

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} m(E_n)$$

$E_i \cap E_j = \emptyset$

$$\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha = \{x : \exists \alpha \in A,\ x \in E_\alpha\}$$

Insiemi di misura nulla

Un insieme E misurabile con $m(E)=0$ si dice "di misura nulla".

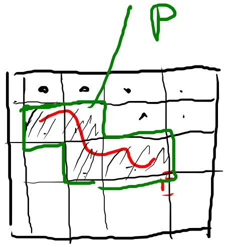
<u>Teorema</u> di caratterizzazione degli insiemi di misura nulla

E è di misura nulla se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esiste un plurirettangolo P tale che $E \subseteq P$ e $m(P) < \varepsilon$.

$$\left[P = \bigcup_{k=1}^{\tilde{n}} R_k \right]$$

<u>Dim</u> Sia E di misura nulla. Allora preso R rettangolo $E \subset R$

$$\underbrace{\int_R 1_E^* \, dm = 0,}_{= \inf \{ S(1_R^*, S) : S \in \Delta(R) \}}$$



Fissiamo $\varepsilon > 0$.

Sia $S \in \Delta(R)$ tale che $S(1_R^*, S) < \varepsilon$.

$$= \sum_{ij} \sup_{R_{ij}} 1_R^* \cdot m(R_{ij}) = \sum_{R_{ij} \cap E \neq \emptyset} m(R_{ij}) < \varepsilon$$

$N=2$

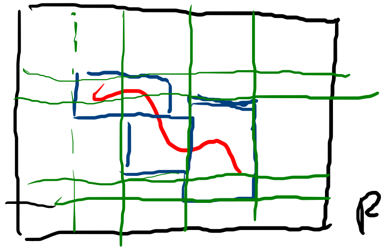
Prendiamo $P = \bigcup \{ R_{ij} : R_{ij} \cap E \neq \emptyset \}$ $\quad E \subseteq P \quad m(P) < \varepsilon$.

—o—

Sia ora E tale che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ P$ plurirettangolo con $m(P) < \varepsilon$, $E \subseteq P$

Dimostriamo che E è misurabile $m(E) = 0$

Cioè dimostriamo che $\forall \varepsilon > 0$ esiste $S \in \Delta(R)$ con $\underbrace{S(1^+_R, S) < \varepsilon}$



Per ipotesi esiste un pluri-rettangolo P

$E \subseteq P \quad m(P) < \varepsilon$

$P = \bigcup_{k=1}^{N} R_k$

"Completiamo" P in una decomposizione di R $\quad S$

$S(1^+_R, S) = m(P) < \varepsilon$. Quindi 1^+_R è integrabile su R e $\int_R 1^+_R \, dm = 0$

cioè $\int_E 1 \, dm = 0$

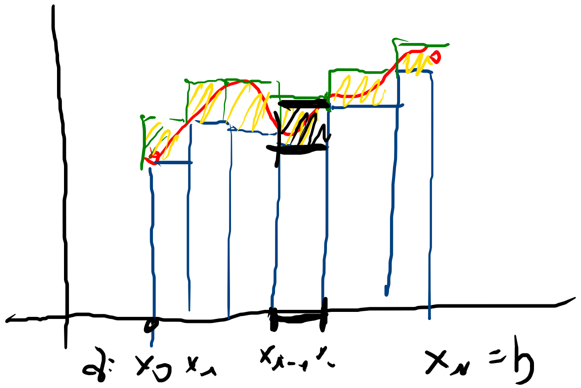
<u>OSS</u>: se $m(E) = 0$ e $E' \subseteq E$, allora E' è misurabile e $m(E') = 0$

Esempio $f : R \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ integrabile su R

Il grafico di f è $\Gamma_f = \{ (x, f(x))^T \in \mathbb{R}^{N+1} : x \in R \}$.

Allora Γ_f è di misura nulla in $\mathbb{R}^{N+1}$

Dim $N = 1$



$\exists \delta \in \Delta([a,b])$:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad S(f,\delta) - s(f,\delta) < \varepsilon$

è l'area del pluri-rettangolo

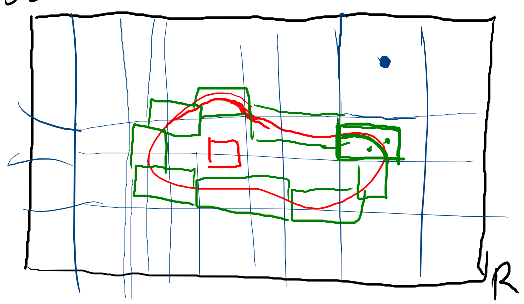
$$\bigcup [x_{i-1}, x_i] \times \left[\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \right] = P \qquad m(P) < \varepsilon$$

$\Gamma_f \subset P$.

Teorema di caratterizzazione degli insiemi misurabili mediante la frontiera

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ E limitato. E è misurabile se e solo se la sua frontiera ∂E è di misura nulla.

Dem $N=2$



Sia E misurabile. Allora 1_R^* è integrabile su R

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta \in \Delta(R)$ tale che

$$S(1_R^*, \delta) - s(1_R^*, \delta) < \varepsilon$$

$$\sum_{i,j} \underbrace{\left(\sup_{R_{ij}} 1_R^* - \inf_{R_{ij}} 1_R^*\right)}_{*} m(R_{ij}) < \varepsilon$$

se $R_{ij} \cap E = \emptyset$ $\quad * = 0$

se $R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset$ $\quad \sup_{R_{ij}} 1_R^* = 1$ $\quad * = 1$

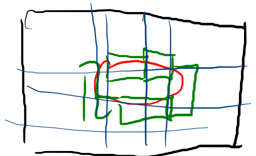
$\inf 1_R^* = 0$

se $R_{ij} \subset E$ $\quad \sup 1_R^* = 1 \quad \inf 1_R^* = 1 \quad * = 0$

$$= \sum_{i,j:\ \partial E \cap R_{ij} \neq \emptyset} m(R_{ij}) < \varepsilon$$

Sia $P = \bigcup \{R_{ij} : \partial E \cap R_{ij} \neq \emptyset\}$ $\quad m(P) < \varepsilon \quad \partial E \subseteq P$.

Sia ora $m(\partial E) = 0$. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ un plurirettangolo P che contiene ∂E e $m(P) < \varepsilon$.



Completo P in una decomposizione di R e osservo che

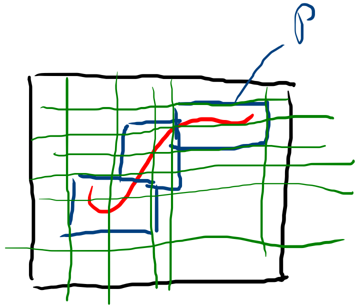
$$S(1_R^*, \delta) - s(1_R^*, \delta) = m(P) < \varepsilon.$$

Teorema di integrabilità sugli insiemi di misura nulla

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ di misura nulla. $f : E \to \mathbb{R}$ limitata.

Allora f è integrabile su E e $\int_E f \, dm = 0$

Dim



Sia $M \in \mathbb{R}$: $|f(x)| \le M \quad \forall x \in E$.

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un plurirettangolo P tale che

$E \subseteq P$ e $m(P) < \frac{\varepsilon}{2M}$; completo P in una decomposizione S di R.

$$S(f^0_R, S) - s(f^0_R, S) = \sum_{i,j} \Big(\underbrace{\sup_{R_{ij}} f^0_R}_{\le M} - \underbrace{\inf_{R_{ij}} f^0_R}_{\le M} \Big) \, m(R_{ij}) \le 2M \, m(P) < \varepsilon$$

$\ne 0$ solo se $R_{ij} \cap E \ne \emptyset$

$\Rightarrow R_{ij} \subseteq P$