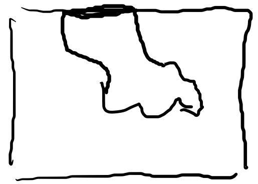
• Osservazione: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad E \subseteq R$ $\quad R$ rettangolo



E è misurabile se e solo se $R \setminus E$ è misurabile

$$1^*_E = \underset{\text{int.}}{1_R} - 1^*_{R\setminus E}$$

• osservazione: $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ limitata, E limitato, $N \subset E$ $m(N)=0$,

Allora f è integrabile su $E \setminus N$ se e solo se f è integrabile su E

$$\int_E f\,dm = \int_{E\setminus N} f\,dm$$

$$\int_{E\setminus N} f\,dm + \overset{=0}{\int_N f\,dm} = \int_E f\,dm$$

"quasi ovunque"   Sia $\mathcal{P}$ una proprietà che ha a che fare con insiemi; si dice che $\mathcal{P}$ vale quasi ovunque se vale su un insieme a eccezione di un sottoinsieme di misura nulla.

Teorema di integrabilità delle funzioni quasi ovunque continue.

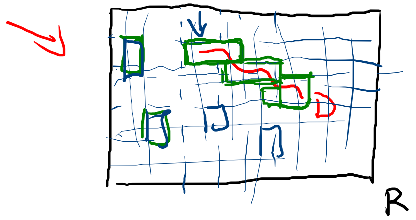
Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ limitata, E misurabile. Sia $N \subset E$ $m(N) = 0$. Sia f continua su $E \setminus N$. Allora f è integrabile su E.

Dim $\boxed{\text{Passo 1}}$ Sia $f: R \to \mathbb{R}$ R rettangolo. $D \subset R$ di misura nulla, f continua su $R \setminus D$. Allora f è integrabile su R.

D interno a R

f è limitata; sia M tale che $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in R$

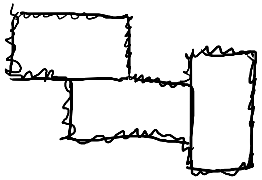
Fissato $\varepsilon > 0$



Poiché D è interno a R ed è di misura nulla esiste un plurirettangolo $P = \bigcup_{i,j} R_{ij}$ tale che $D \subset P$ e

$$m(P) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

$R \setminus$ interno di P è compatto. f è continua su $R \setminus \operatorname{int} P$, f è uniformemente continua su $R \setminus \operatorname{int} P$.



Prendiamo $\sigma > 0$ tale che $\forall\, x_1, x_2 \in R \setminus \operatorname{int} P$ se $\|x_1 - x_2\| < \sigma$ allora $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2\, m(E)}$.

Prendiamo una decomposizione S di R di mesh $< \sigma$ e che completa P

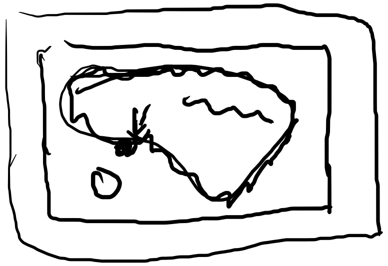
$$S(f,S) - s(f,S) = \sum_{\substack{i,j \text{ tali che} \\ R_{ij} \subset P}} \underbrace{\Big(\max_{R_{ij}} f - \min_{R_{ij}} f\Big)}_{< \frac{\varepsilon}{2 m(E)}} m(R_{ij}) + \underbrace{\sum_{\substack{P \\ i,j}} \underbrace{\Big(\underbrace{\sup_{R_{ij}} f}_{\le M} - \underbrace{\inf_{R_{ij}} f}_{\inf f > -M}\Big)}_{\le 2M} m(R_{ij})}_{\le 2M\, m(P) \,<\, 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M}} =$$

$f(x_1)$ $f(x_2)$

$\|x_1 - x_2\| < \sigma$

$$\le \frac{\varepsilon}{2\, m(E)}\, m(E) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

<u>Passo 2</u> : E misurabile, $N \subset E$ $\underline{m(N) = 0}$.



Prendiamo un rettangolo R tale che E è interno di R

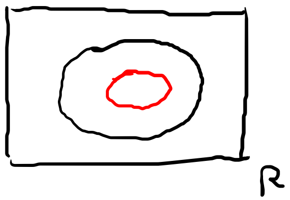
$D = N \cup \partial E$ E misurabile $\Rightarrow$ ∂E ha misura nulla

$\Rightarrow$ D ha misura nulla. f_R^* è continua su $R \setminus D$

Per il passo 1 f_R^* è integrabile su R $\Rightarrow$ f è integrabile su E.

Ancora sulle proprietà dell'integrale

Restrizione: f integrabile su E, $E' \subset E$, E' misurabile. Allora $f|_{E'}$ è integrabile.



$f^*_R \cdot 1^*_{E'} : R \to \mathbb{R}$ è integrabile su R

$= \left(f|_{E'}\right)^*_R$

$$f^*_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in R \setminus E' \\ f(x) & \text{se } x \in E' \end{cases}$$

Teorema della media integrale

Sia E misurabile, $f: E \to \mathbb{R}$ integrabile. Allora $\inf_E f \cdot m(E) \le \int_E f\,dm \le \sup_E f \cdot m(E)$

Inoltre se f è continua su E, $m(E)>0$, E è connesso (e chiuso). Allora esiste $x_0 \in E$ tale che

$$f(x_0) = \frac{\int_E f\,dm}{m(E)}$$

Dim: $\inf_{x\in E} f(x) \le f(x) \le \sup_E f$

$\exists\, x_0 \in E$:

$\Rightarrow \int_E \left[\inf_{x\in E} f(x)\right] dm \le \int_E f\, dm \le \sup_E f \cdot m(E)$

$f(x_0) = \ldots$

$\qquad \| $

$\inf_E f \cdot m(E)$

$\in$ immagine di f

Sia $m(E)>0$ E connesso chiuso f continua ; allora $\min f \le \frac{\int_E f\, dm}{m(E)} \le \max f$

l'immagine di f è ~~un~~ l'intervallo $\left[\min_E f, \max_E f\right]$

Domini normali di $\mathbb{R}^2$

Un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice normale rispetto all'asse x y se esistono $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $[c,d] \subset \mathbb{R}$ funzioni continue

$$\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$$

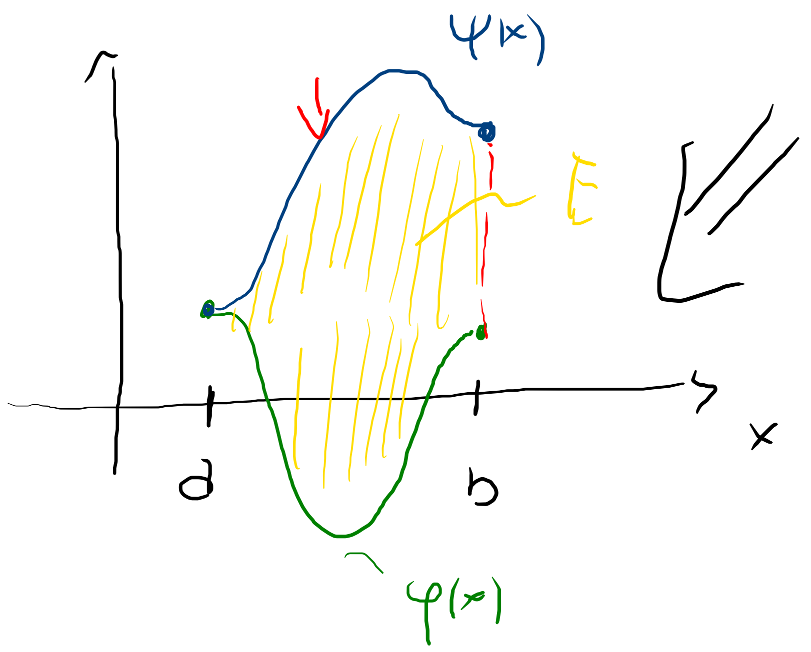
$$\alpha, \beta : [c,d] \to \mathbb{R}$$

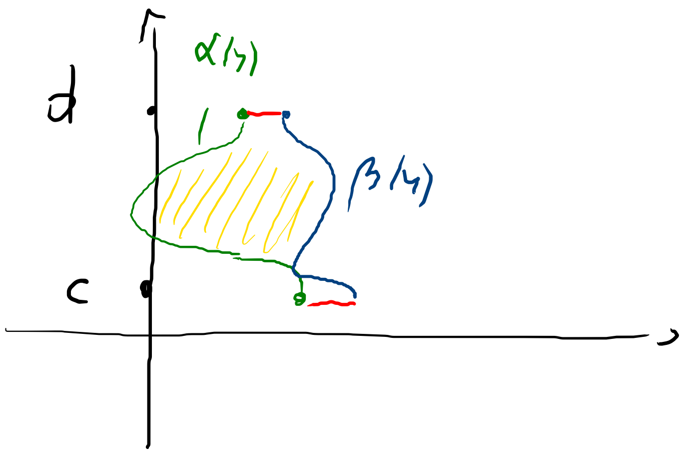
$$\varphi(x) \le \psi(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\alpha(y) \le \beta(y) \quad \forall y \in [c,d]$$

$$E = \{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \}$$

$$E = \{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d],\ \alpha(y) \le x \le \beta(y) \}$$





OSSERVAZIONE

Un dominio normale di $\mathbb{R}^2$ è misurabile. Infatti se E è normale, la frontiera di E è unione finita di grafici di funzioni continue e eventualmente segmenti, e quindi ∂E è di misura nulla, quindi E è misurabile.

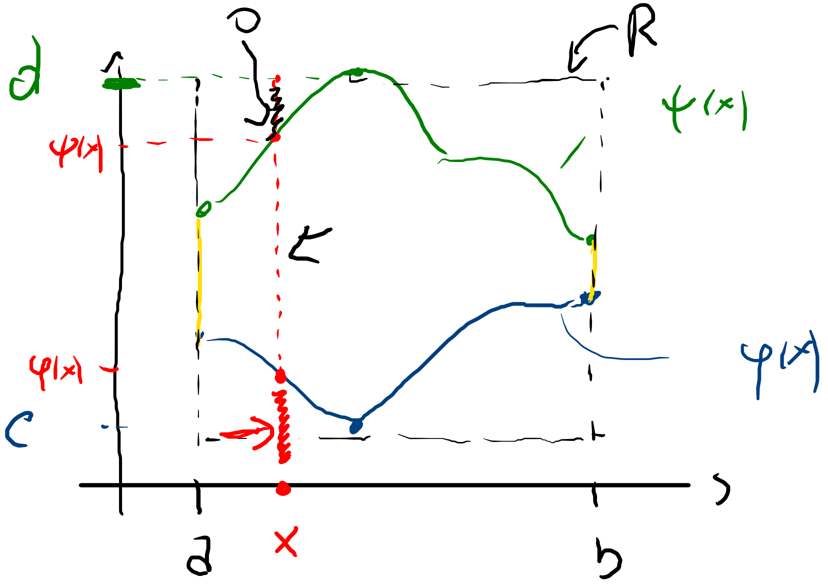
Teorema (integrale di una funzione continua su un insieme normale)

Sia $E = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ dominio normale rispetto all'asse x; ($\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue). Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. Allora f è integrabile su E e si ha

$$\boxed{\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx}$$

Dim: f è limitata perché continua su E compatto. E è misurabile $\Rightarrow$ f è integrabile.

Sia $c = \min\limits_{x\in[a,b]} \varphi(x)$ $\quad d = \max\limits_{x\in[a,b]} \psi(x)$ (esistono per Weierstrass)



Sia $R = [a,b]\times[c,d]$

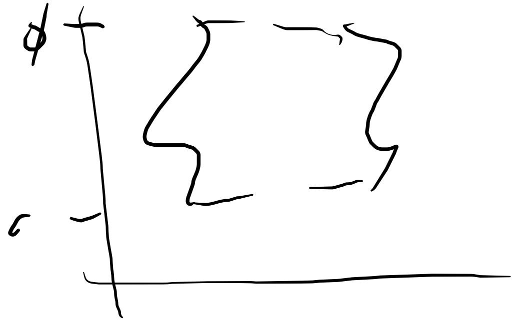
$$\iint_E f\,dm = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f_R^*(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f_R^*(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$\underbrace{\cancel{\int_c^{\varphi(x)} f_R^*(x,y)\,dy}}_{=0} + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \underbrace{f_R^*(x,y)}_{f(x,y)}\,dy + \underbrace{\cancel{\int_{\psi(x)}^{d} f_R^*(x,y)\,dy}}_{=0} = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

Vale un teorema analogo per i domini normali rispetto l'asse y

$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d] , \alpha(y) \leq x \leq \beta(y) \}$ α, β continue

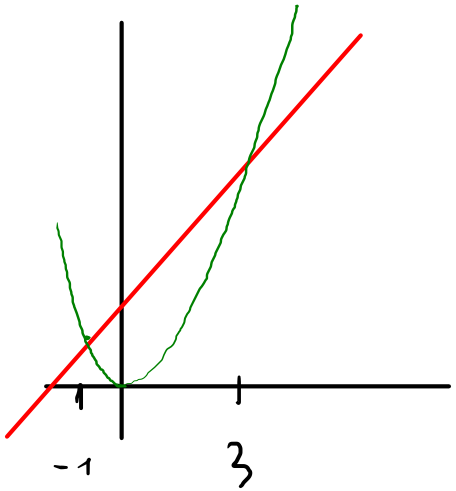


$f : E \to \mathbb{R}$ continua su E. Allora f è integrabile

e $\iint_E f \, dm = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y) \, dx \right) dy$

<u>Esempi</u> $\iint_D xy \, dx dy$ D è la regione limitata del piano compresa tra la parabola $y = x^2$ e la retta $2x - y + 3 = 0$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x+3 \end{cases} \qquad x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad x = -1, 3 \qquad (-1, 1)^T, \quad (3, 9)^T$$



$$D = \{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-1, 3], \ x^2 \le y \le 2x+3 \}$$

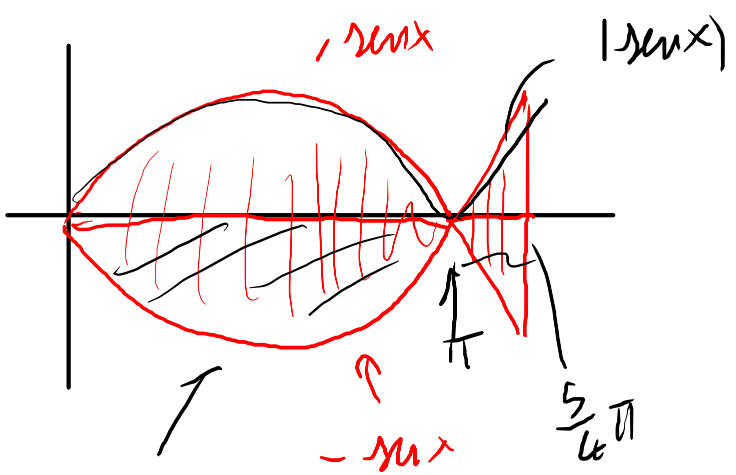
$$\iint_D xy \, dx dy = \int_{-1}^{3} \left(\int_{x^2}^{2x+3} xy \, dy \right) dx =$$

$$\left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^{2x+3}$$

$$= \int_{-1}^{3} x \cdot \frac{1}{2} \left((2x+3)^2 - x^4 \right) dx = \cancel{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{3} \left(2x^3 + 6x^2 + \frac{9}{2} x - \frac{1}{2} x^5 \right) dx = 2 \cdot \frac{81}{4} + \frac{6}{3} 27 + \frac{9}{4} 9 - \frac{1}{12} 3^6$$

$$4x^2 + 12x + 9$$

$$\text{--} = \frac{160}{3}$$

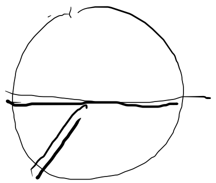


$- |\operatorname{sen} x|$

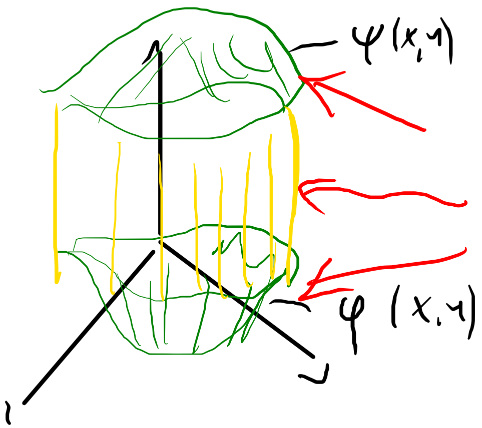
$$\int_0^{\frac{5}{4}\pi}\left(\int_{-|\operatorname{sen} x|}^{|\operatorname{sen} x|} dy\right)dx = 2\int_0^{\frac{5}{4}\pi}\left(\int_0^{|\operatorname{sen} x|} dy\right)dx$$

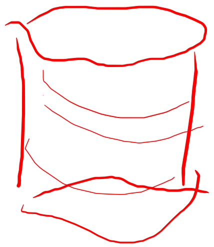
$$= 2\left[\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\operatorname{sen} x} dy\right)dx + \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\left(\int_0^{-\operatorname{sen} x} dy\right)dx\right] =$$

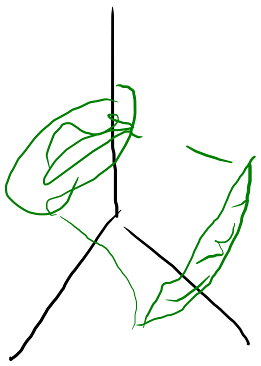
$$= 2\left(\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx - \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\operatorname{sen} x\,dx\right) = 2\left(\left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \left[\cos x\right]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\right) = 2\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$$



In $\mathbb{R}^3$?







Domini normali: Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un chiuso misurabile. Siano $\varphi, \psi : K \to \mathbb{R}$ continue, $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$ $\forall (x,y)^T \in K$. L'insieme

$$E = \{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : (x,y)^T \in K, \ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y) \}$$

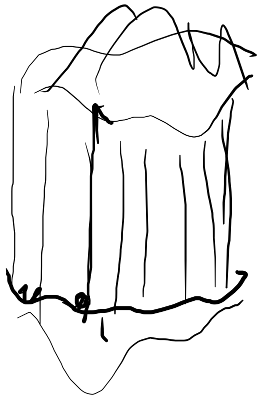
si dice normale rispetto al piano xy

<u>Teorema</u>: un dominio normale di $\mathbb{R}^3$ è misurabile.

Dim Proviamo che ∂E ha misura nulla in $\mathbb{R}^3$.

$$\partial E = \Gamma_\varphi \cup \Gamma_\psi \cup \text{cilindro}$$

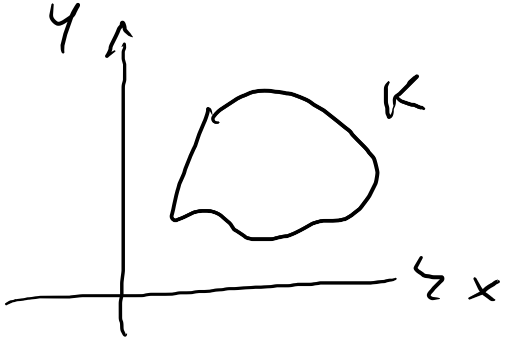
hanno misura nulla (grafici di funzioni continue)



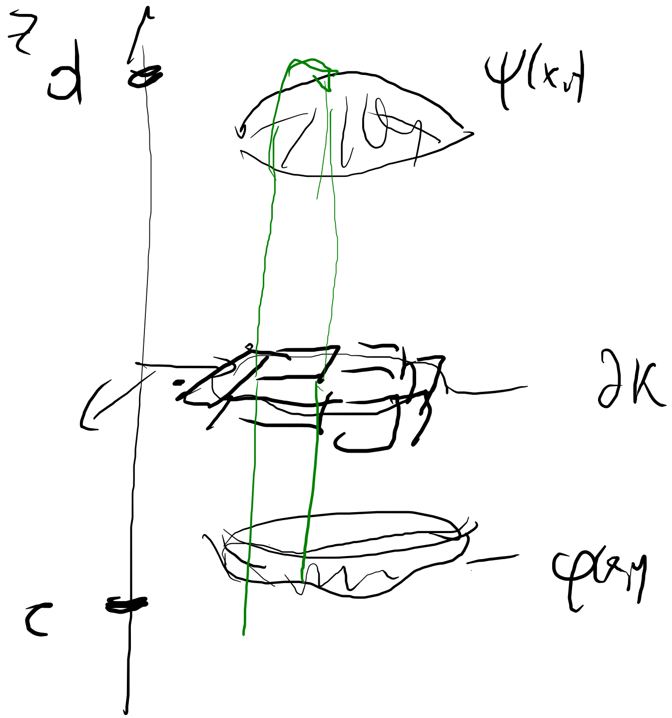
Una superficie cilindrica è del tipo

$$\{ (x,y,z)^T : (x,y)^T \in C, \ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y) \}$$

curva del piano xy



$C = \partial K$ è di misura nulla nel piano xy

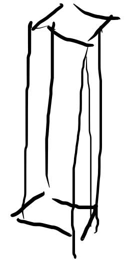


sia $c = \min\limits_{(x,y)^T \in K} \varphi(x,y)$ $\quad d = \max\limits_{(x,y)^T \in K} \psi(x,y)$

∂K ha misura nulla in $\mathbb{R}^2$;

quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste un plurirettangolo in $\mathbb{R}^2$ P tale che $\partial K \subset P$ e $\underline{m(P) < \dfrac{\varepsilon}{d-c}}$

$$P = \bigcup_{k=1}^{N} R_k$$



Considero un plurirettangolo Q in $\mathbb{R}^3$ $\quad Q = \bigcup\limits_{k=1}^{N} R_k \times [c,d]$

$$m(Q) = \underset{\uparrow}{m(P)} \cdot (d-c) < \varepsilon$$

e il cilindro è contenuto in Q.

Teorema di integrabilità su domini normali di $\mathbb{R}^3$

Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ chiuso e misurabile, $\varphi, \psi \in C(K, \mathbb{R})$ $\quad \varphi(x,y) \leq \psi(x,y)$.

$E = \{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y)^T \in K, \quad \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y) \}$ dominio normale.

$f : E \to \mathbb{R}$ continua su E. Allora f è integrabile su E e si ha

$$\iiint_E f \, dm = \iint_K \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z) \, dz \right) dx\,dy$$

riduzione per corde