Consideriamo una funzione reale di variabile reale

$f: U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad U$ aperto.

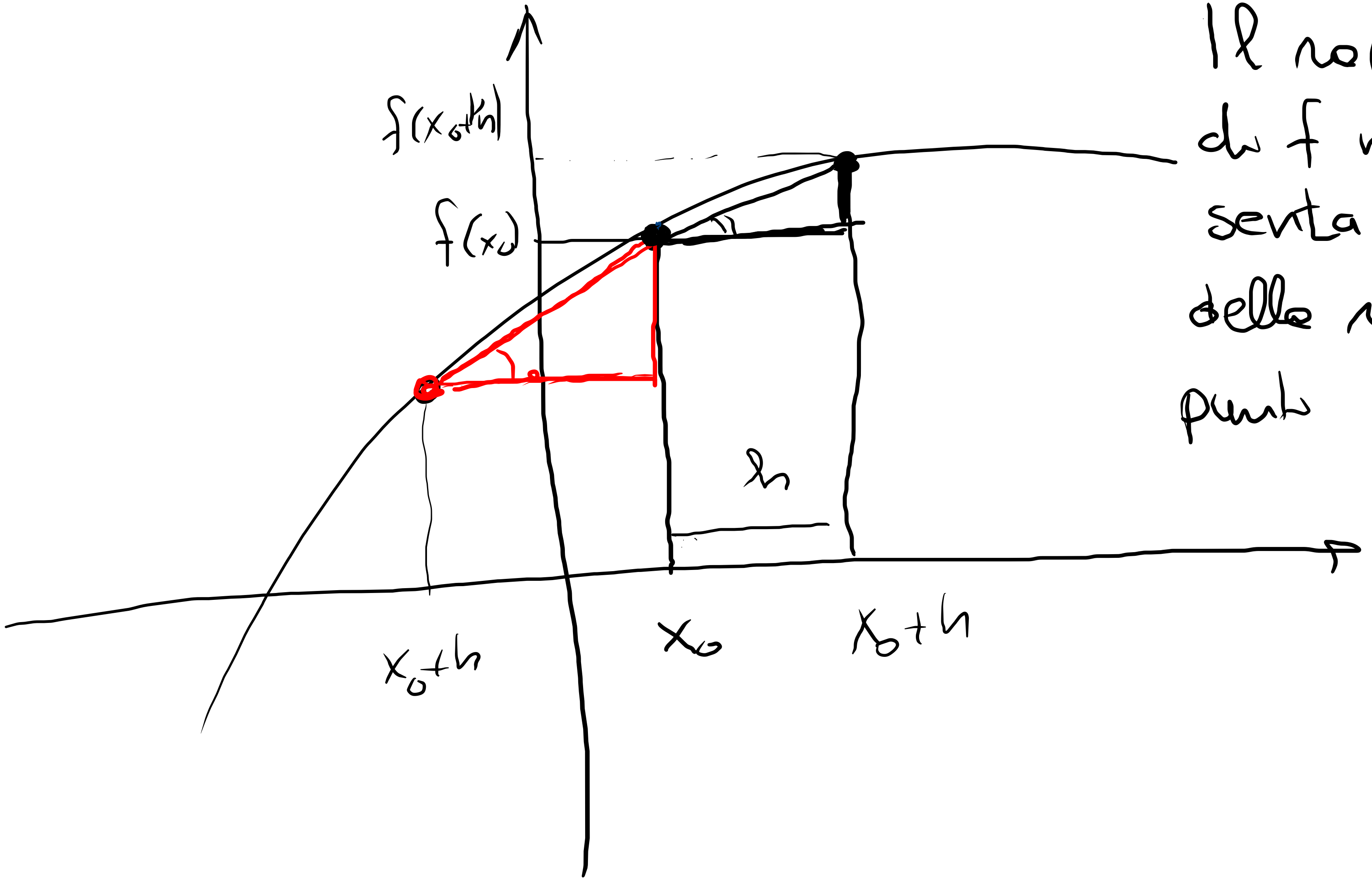
$x_0 \in U$ Definiamo RAPPORTO INCREMENTALE

di f nel punto x_0 la quantità

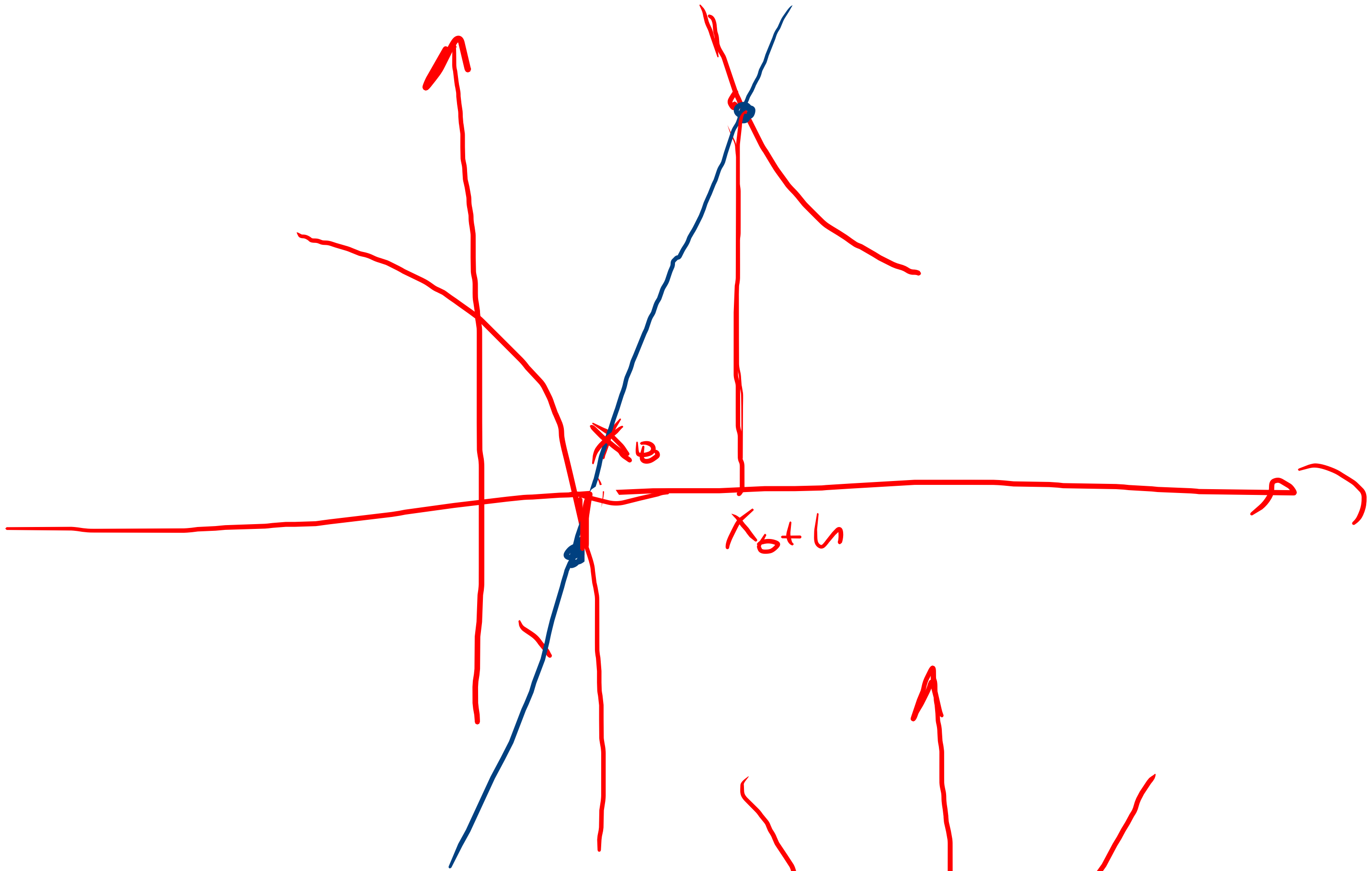
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad h = x - x_0$$

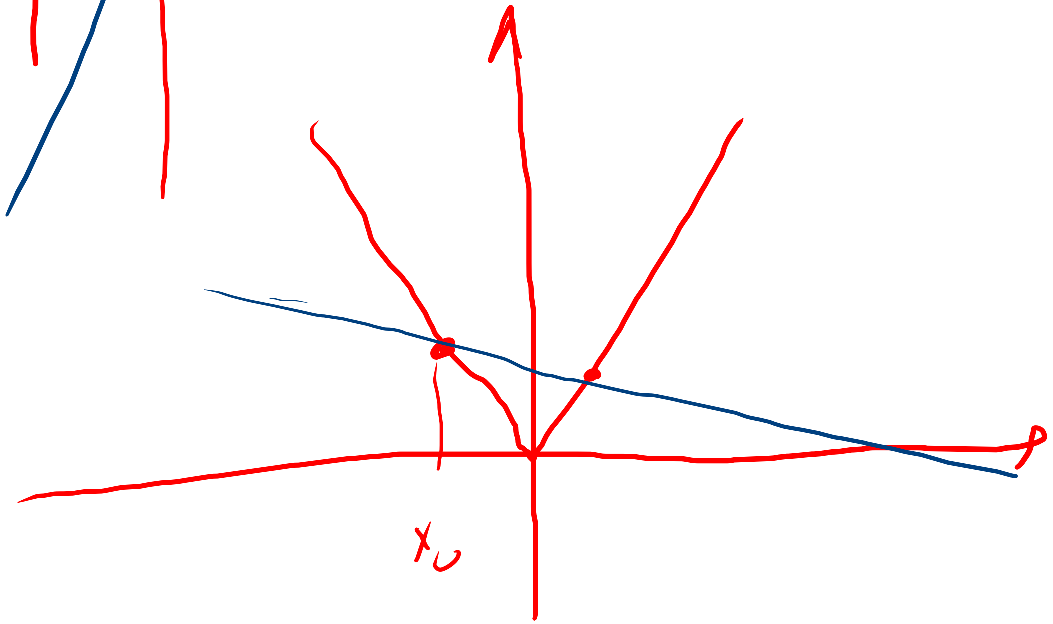
$h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(in modo che $x_0+h \in U$)



Il rapporto incrementale di f nel punto x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$


x_0
x_0+h


x_0

__Def__ Diremo che f è DERIVABILE in x_0 se ESISTE ed è FINITO il limite del rapporto incrementale di f nel punto x_0 al tendere di h (che rappresenta l'incremento) a 0, ossia in simboli

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l \qquad l \in \mathbb{R}$$

Equivalentemente

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \qquad l \in \mathbb{R}$$

Def Se f è derivabile in x_0, si pone $\frac{df}{dx}$ ...

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \boxed{f'(x_0) = \frac{d}{dx} f (x_0)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è detta DERIVATA di f in x_0.

Oss Se f è derivabile in ogni punto $x_0 \in U$ diremo che f è derivabile in U e viene così definita la funzione $x \xmapsto{f'} f'(x)$ $x \in U$ detta DERIVATA di f

ES La funzione $f(x) = x^2$ è derivabile in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2hx_0 + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(2x_0 + h \right) = 2x_0$$

✓

In generale $f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}$ è derivabile in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$

Infatti

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^n} + n x_0^{n-1} \cdot h + \sum_{k \geq 2}^{n} \binom{n}{k} \cdot x_0^{n-k} h^k - \cancel{x_0^n}}{h} =$$

$$(x_0+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} \cdot h^k = 1 \cdot x_0^n + n x_0^{n-1} \cdot h + \sum_{k \geq 2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} \cdot h^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{n \cdot x_0^{n-1} h + \sum_{k \geq 2}^{n} \binom{n}{k} \cdot x_0^{n-k} \cdot h^{k}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[n x_0^{n-1} + \underbrace{\sum_{k \geq 2}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} \cdot h^{k-1}}_{0} \right] =$$

$$= \boxed{n x_0^{n-1}}$$

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Prop Siano f e g funzioni derivabili in x_0. Allora la funzione $f+g$ è derivabile in x_0 e risulta

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Dim

$$\frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

passando al limite per $h \to 0$ si ha la tesi, ovvero

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \qquad \square$$

Prop Sia f derivabile in x_0. Preso comunque una costante K, la funzione $K \cdot f$ è derivabile in x_0 e inoltre $(K \cdot f)'(x_0) = K \cdot f'(x_0)$

prodotto in $\mathbb{R}$

Dim
$$\frac{(K \cdot f)(x_0+h) - (K \cdot f)(x_0)}{h} =$$

prodotto in $\mathbb{R}$

$$= \frac{K \cdot f(x_0+h) - K \cdot f(x_0)}{h} = K \cdot \boxed{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

passando al limite per $h \to 0$ si ha la tesi, ovvero

$$(K \cdot f)'(x_0) = K \cdot f'(x_0)$$

D.

Di conseguenza ogni funzione POLINOMIALE è derivabile ed è facile esprimere la derivata di una funzione polinomiale

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$$

Oss La derivata di una funzione costante è zero
(L'incremento dei valori è nullo qualsiasi che sia h)

Teo Ogni funzione DERIVABILE in x_0 e' CONTINUA in x_0.

Dim Supponiamo f derivabile in x_0, ossia supponiamo esista finito il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Vogliamo mostrare che f è continua in x_0 ossia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x\to x_0} \left(f(x)-f(x_0)\right) = 0$

$$\lim_{x\to x_0} \left[f(x)-f(x_0)\right] = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0)\right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0$$

$$= 0$$

$\square$

poiché so che esiste finito il limite del rapporto incrementale di f in x_0

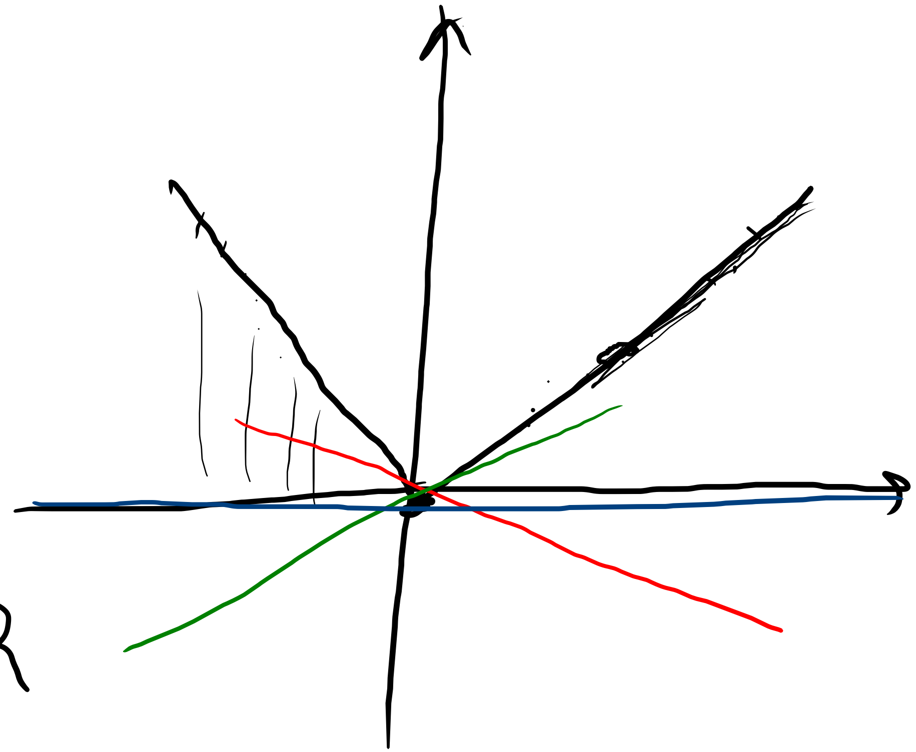
NON è vero il VICEVERSA; esistono infatti funzioni <u>continue</u> ma <u>non</u> <u>derivabili</u>.

$$x \longmapsto |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\| $$

$$\sqrt{x^2}$$

è continua in $\mathbb{R}$



in quanto composta di funzioni continue

$(\sqrt{}$ e $(\ )^2)$.

Tuttavia $x \longmapsto |x|$ NON è derivabile in $\underset{\substack{\shortparallel \\ x_0}}{0}$.

Infatti $$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - \cancel{|0|}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} =$$ NON ESISTE

in quanto $$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$
$$\neq$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Prop

La funzione seno è derivabile in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

e risulta $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x_0 = \cos x_0$

Dim

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x_0+h) - \operatorname{sen}(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x_0 \cos h + \cos x_0 \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x_0 \left[\cos h - 1\right] + \cos x_0 \cdot \operatorname{sen} h}{h}$$

Pertanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x_0+h)-\operatorname{sen}(x_0)}{h} = \quad . \quad . \quad - \quad =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}x_0(\cos h-1)+\cos x_0 \cdot \operatorname{sen} h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen}x_0 \cdot \underbrace{\frac{\cos h-1}{h}}_{0} + \cos x_0 \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{1}\right] = \cos x_0$$

Es Mostrare che la funzione cos è derivabile in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e risulta $\boxed{\frac{d}{dx} \cos x_0 = -\operatorname{sen} x_0}$

$\boxed{\text{Formula di Leibniz}}$

Prop Supponiamo f e g derivabili in x_0. Allora la funzione $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e risulta

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

prodotto in $\mathbb{R}$

Dim

$$\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}$$

$$=\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}$$

$$=\frac{\left[f(x_0+h)-f(x_0)\right]\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot\left[g(x_0+h)-g(x_0)\right]}{h}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\downarrow \; f'(x_0)} \cdot \underbrace{g(x_0+h)}_{\downarrow \; g(x_0)} + \underbrace{\boxed{f(x_0)}}_{\downarrow \; f(x_0)} \underbrace{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}_{\downarrow \; g'(x_0)}$$

$h \to 0$

per ipotesi $f'(x_0)$

$g(x_0)$ poiché g è derivabile e quindi continua in x_0

per ipotesi $g'(x_0)$

Quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x_0+h)-(f \cdot g)(x_0)}{h} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$\square$

Prop Sia f derivabile in x_0 e $f(x_0) \neq 0$.

(Quindi f è continua in x_0 ed inoltre essendo $f(x_0) \neq 0$ $f(x) \neq 0$ in un intorno di x_0.)

Allora la funzione reciproca di f, ossia

$$x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$$ è derivabile in x_0

e risulta

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

Dim

$$\frac{\dfrac{1}{f(x_0+h)} - \dfrac{1}{f(x_0)}}{h} = \frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{h \cdot f(x_0) \cdot f(x_0+h)} =$$

$$= - \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow \; f'(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{1}{f(x_0) \cdot f(x_0+h)}}_{\downarrow \; \frac{1}{f(x_0)^2}} \longrightarrow -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

passando al limite per $h \to 0$

in quanto f è continua in x_0

Es Mostrare che la funzione tangente trigonometrica, ove definita, è derivabile e trovare un'espressione della derivata di $tg\,x$

$$\boxed{tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}}$$

$$= \frac{1}{cos\,x} \cdot sen\,x$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} \frac{(\cos h + 1)}{\cos h + 1} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} =$$

$$\operatorname{sen}^2 h + \cos^2 h = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 h - 1 = -\operatorname{sen}^2 h$$

$$= \lim_{h\to 0} - \frac{\operatorname{sen}^2 h}{h\,(\cos h + 1)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{\operatorname{sen} h}{h}} \cdot \underbrace{\frac{(-\operatorname{sen} h)}{\cos h + 1}}_{\to 0} = 0$$