$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{R}}}$

$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \quad x_j \in \mathbb{R} \}$

$= \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$

f si dice di 2, 3, . . ., n variabili reali a valori reali

<u>Dom f</u> è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ ove f è definita

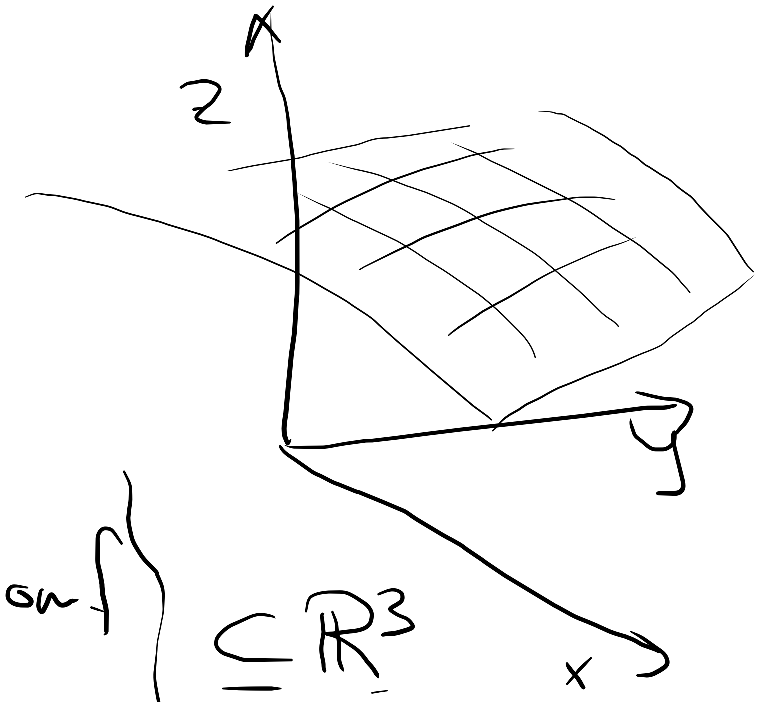
$z = f(x, y)$

$$\boxed{f(x_1, \dots, x_n)}$$

$$\left\{ (x, y, f(x,y)) \quad (x,y) \in \mathrm{Dom} f \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

superficie

grafico di f

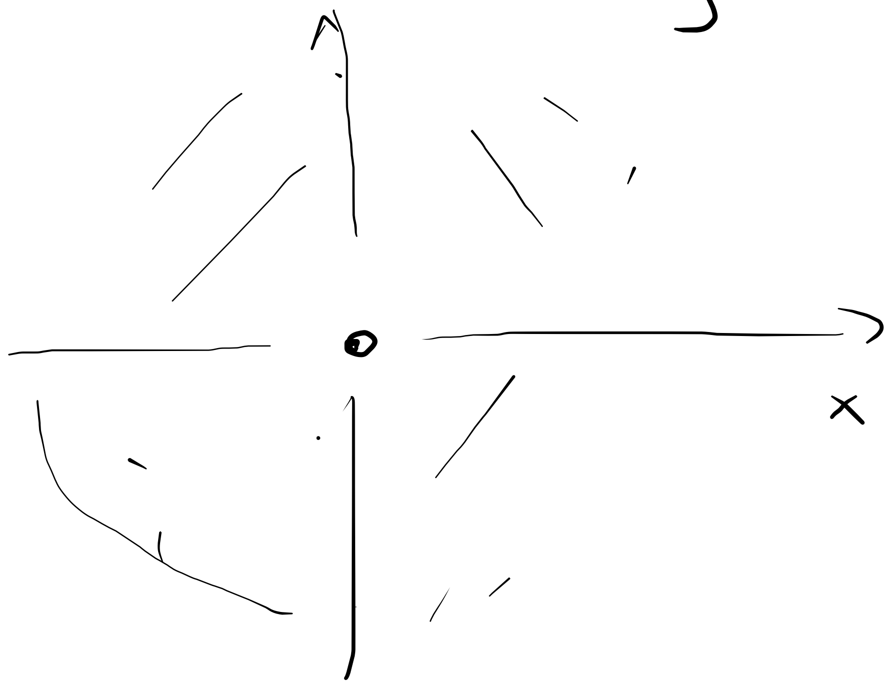


$$\left\{ (x, f(x)) \quad x \in \mathrm{Dom} f \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

① $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

ho per dominio

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \mathrm{Dom}\, f$

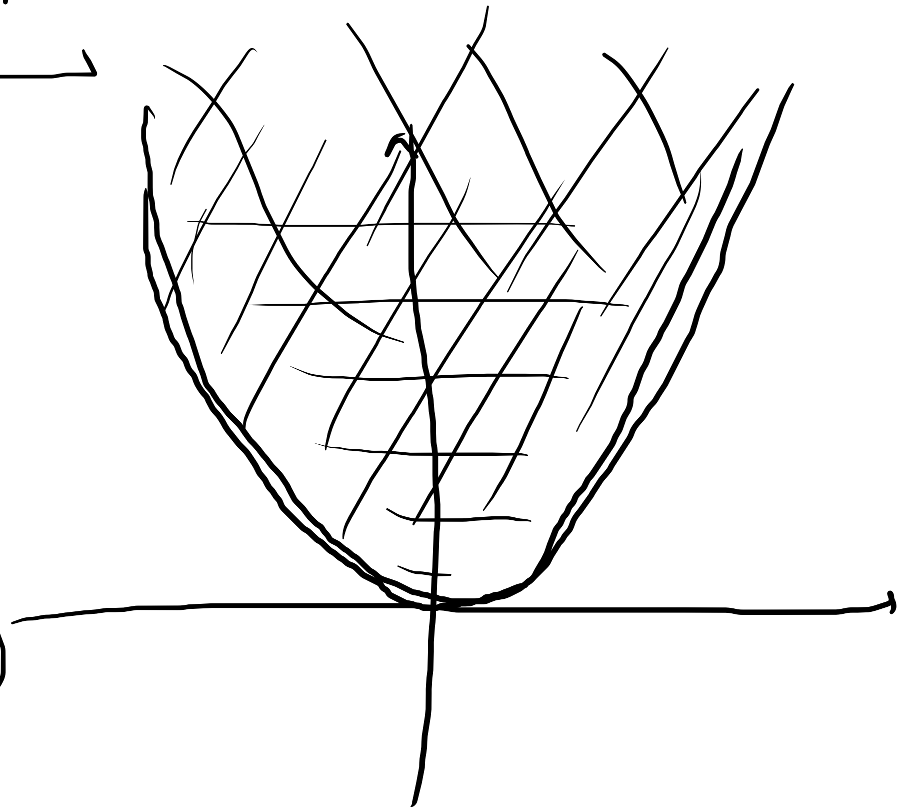


② $f(x,y) = \sqrt{\underbrace{y - x^2}}$

$y - x^2 \geq 0$

$\Longleftrightarrow \quad \underline{y \geq x^2}$

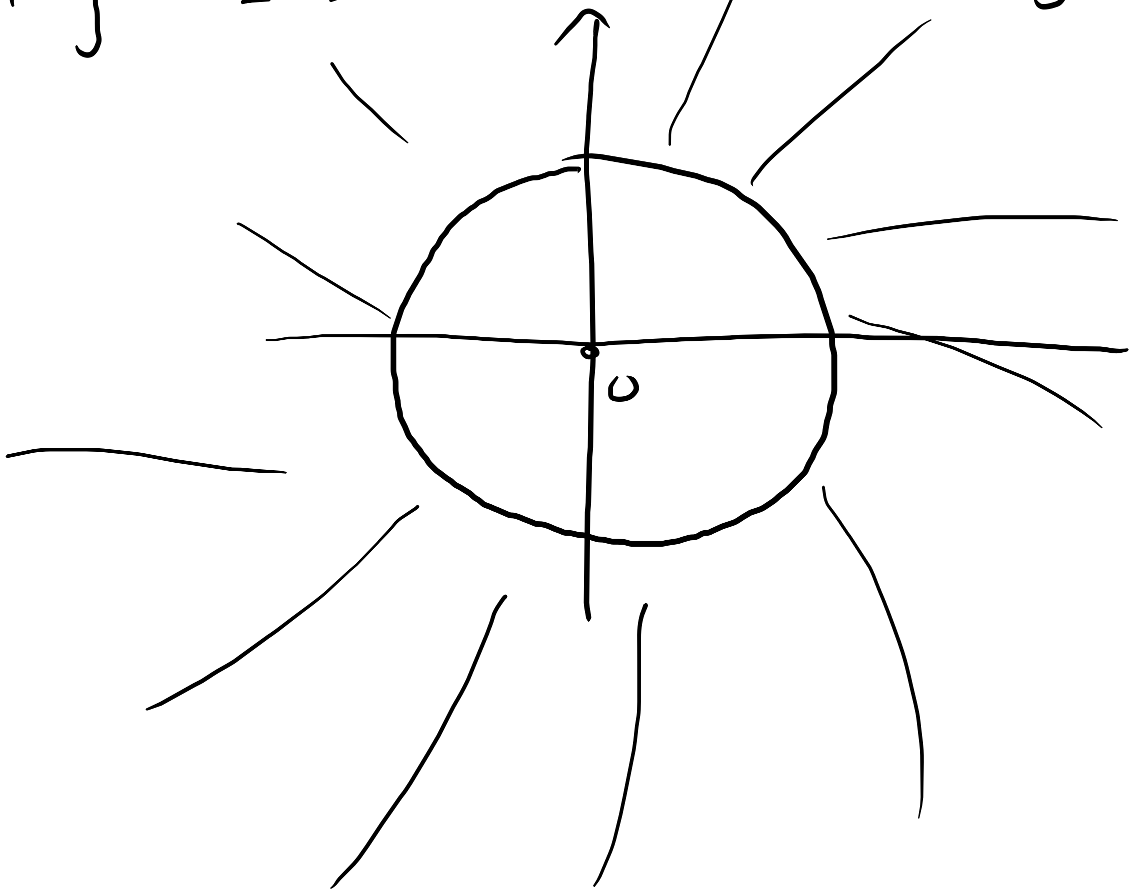
$\mathrm{Dom} f = \{ (x,y) \quad y \geq x^2 \}$



③ $f(x,y) = \ln \underbrace{(x^2+y^2-1)}$

$x^2+y^2-1 > 0$ $\qquad$ $x^2+y^2 > 1$ $\qquad$ $\mathcal{D}$om f =

$= \{ (x,y) : x^2+y^2 > 1 \}$



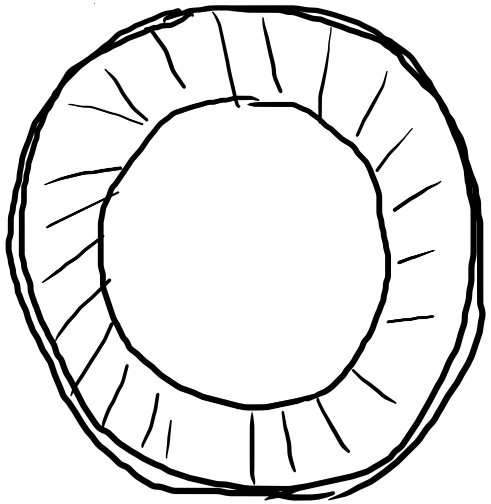
4

$$f(x,y) = \ln\underbrace{(x^2+y^2-1)} - \sqrt{2-x^2-y^2}$$

$$x^2+y^2>1 \qquad 2-x^2-y^2 \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2+y^2 \leq 2$$



$$\mathrm{Dom} f = \{(x,y) : \; 1 < x^2+y^2 \leq 2\}$$

Parleremo di INTORNI (CIRCOLARI) di un punto

$P = (x_0, y_0)$

$$\underline{\underline{I_P(r)}} = \{ Q = (x, y) \quad d_{\mathbb{R}^2}(P, Q) < r \}$$

$$d_{\mathbb{R}^2}(P,Q) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

Estendiamo quindi le definizioni di punto interno ad un insieme A, esterno, di frontiera

Estendiamo anche la definizione di punto di accumulazione per un insieme A.

P è punto di accumulazione per $A = \mathrm{Dom} f$

se comunque preso un intorno I_p di P esiste

un punto $Q \in \mathrm{Dom} f \cap I_p$

Diremo che la funzione $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ha

limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ al tendere di (x,y) a (x_0,y_0)

(IN SIMBOLI

$$\lim_{\overset{P}{\overset{\shortparallel}{(x,y)}} \to \overset{P_0}{\overset{\shortparallel}{(x_0,y_0)}}} f\overset{P}{\overset{\shortparallel}{(x,y)}} = \ell$$

)

se comunque preso un intorno I_l di l

(se $l = +\infty$ $\{ x > M \}$
$l = -\infty$ $\{ x < M' \}$)

I_{P_0}

esiste in corrispondenza un intorno di $P_0 = (x_0, y_0)$

tale che se $P \in I_{P_0} \cap \mathrm{Dom} f$ allora

$f(P) \in I_l$

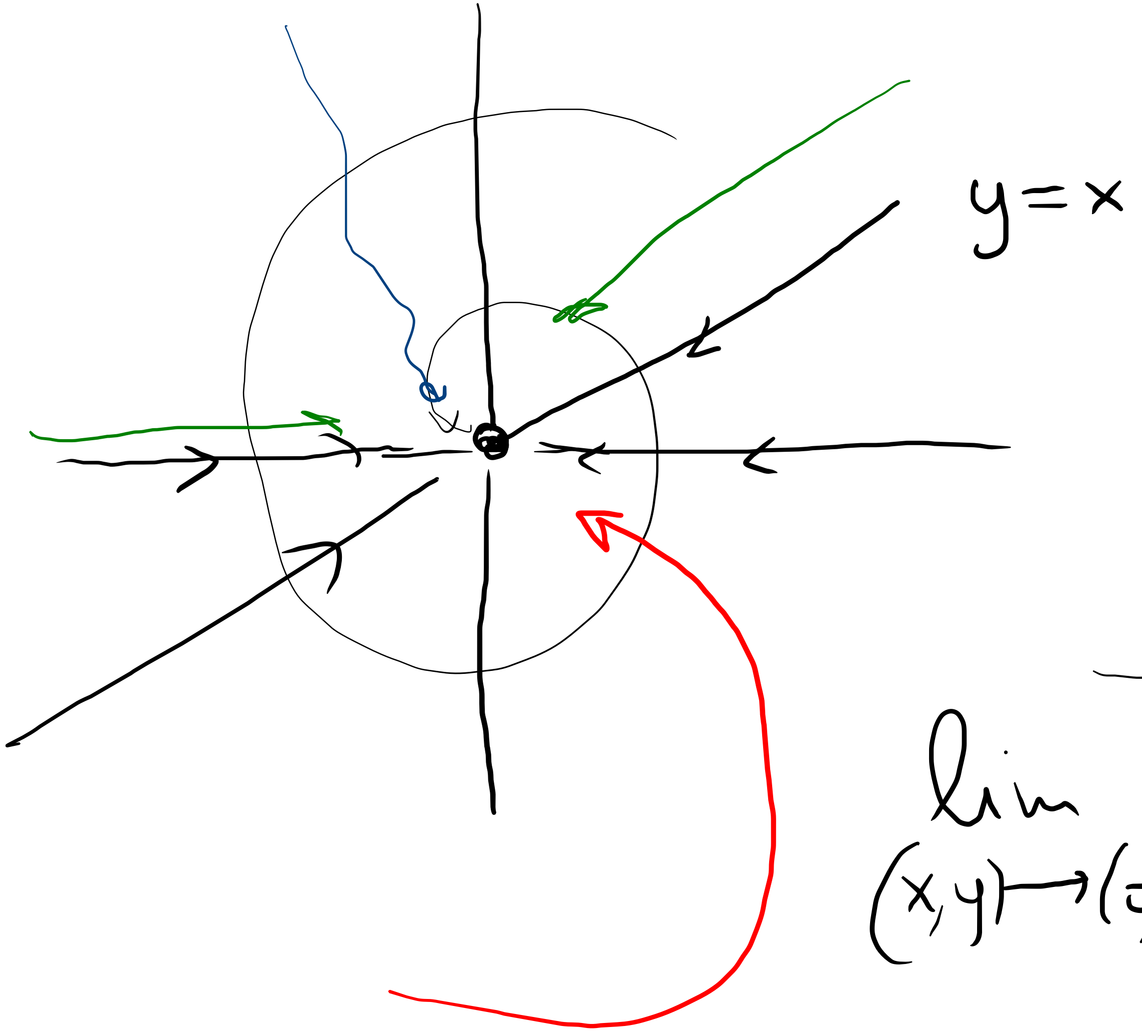
Analogamente
$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \to (x_1^0, \dots, x_n^0)} f(x_1, \dots, x_n) = \ell$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$(0,0)$ è punto di accumulazione di $\operatorname{Dom} f$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$



$$f\Big|_{y=x}(x,y) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

$$f\Big|_{y=0}(x,y) = \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{NON esiste}$$

Utilizzando le coordinate polari nel piano ad un punto $P = (x, y)$ rimane associata

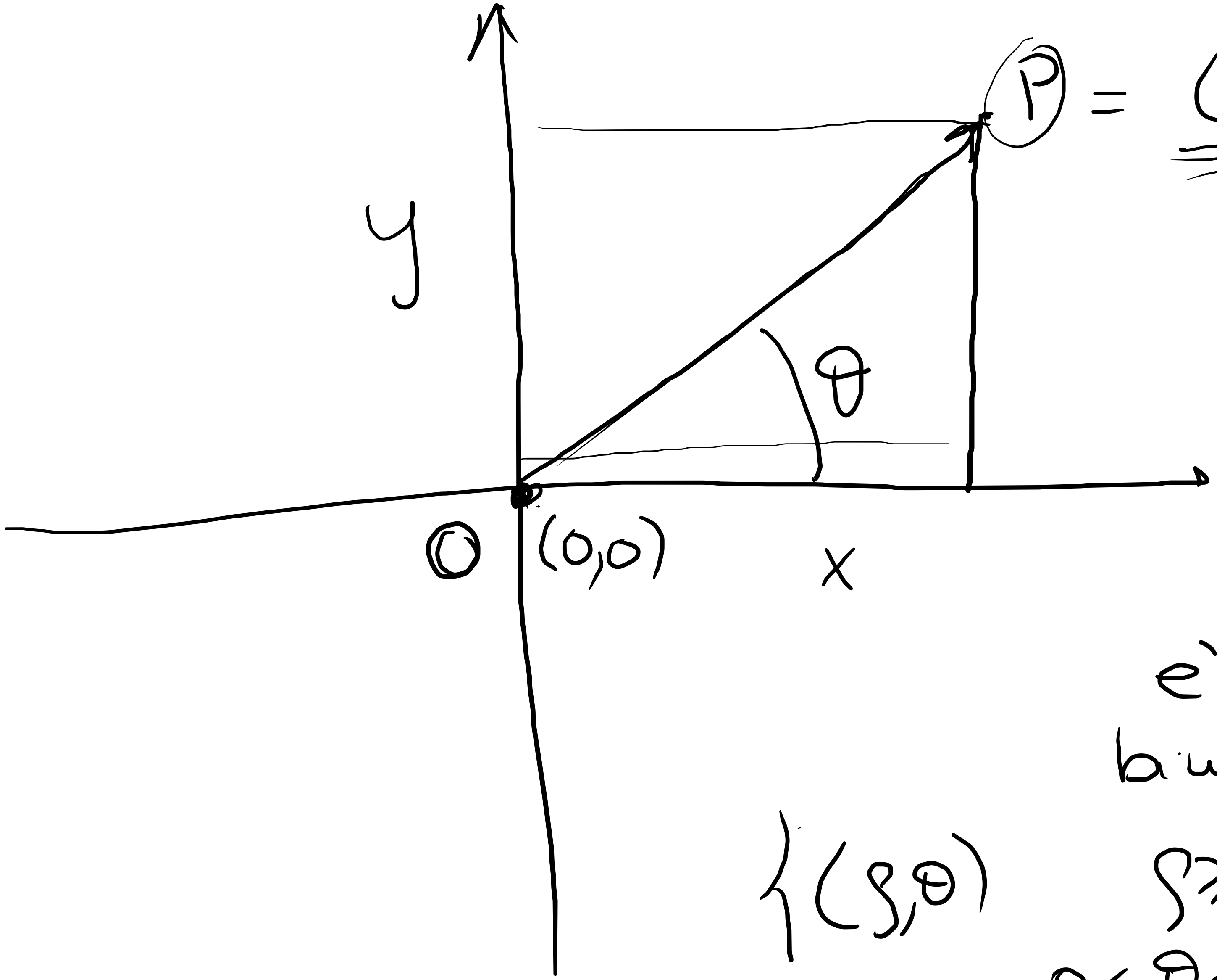
$\nearrow$ coordinate cartesiane

una coppia di numeri reali (ρ, θ) con $\rho \geq 0$

$0 \leq \theta < 2\pi$ che rappresentano rispettivamente

il MODULO di $\overrightarrow{OP}$ e l'argomento di $\overline{OP}$

ossia l'ampiezza dell'angolo formato dal semiasse positivo delle ascisse e dal vettore $\overrightarrow{OP}$.



$P = (x,y)$

$\vec{OP}$ $\quad d(O,P) = \rho \geq 0$

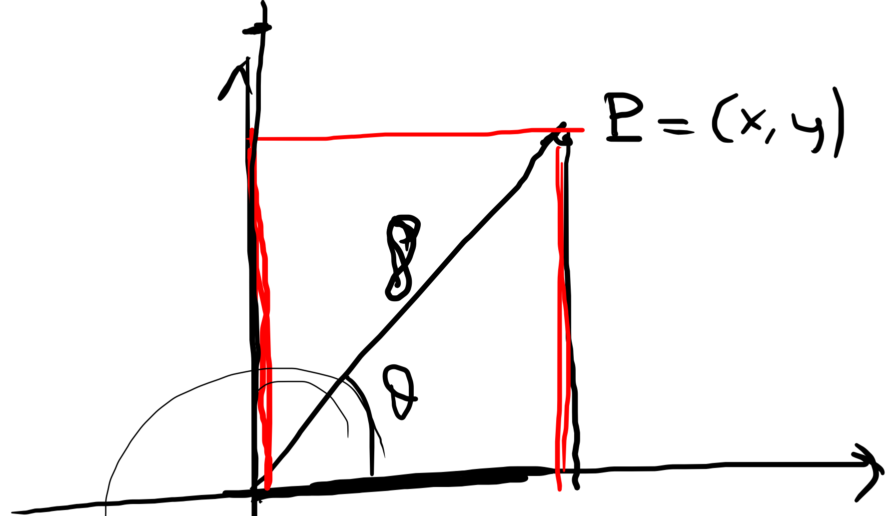
$\mathbb{R}^2 \setminus \{O = (0,0)\}$

è in corrispondenza biunivoca con

$$\left\{ (\rho, \theta) \quad \begin{array}{c} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{array} \right\}$$

$$x = \rho \cdot \cos\theta$$

$$y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta$$



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

$$\boxed{\rho = 0 \iff P = (0,0)}$$

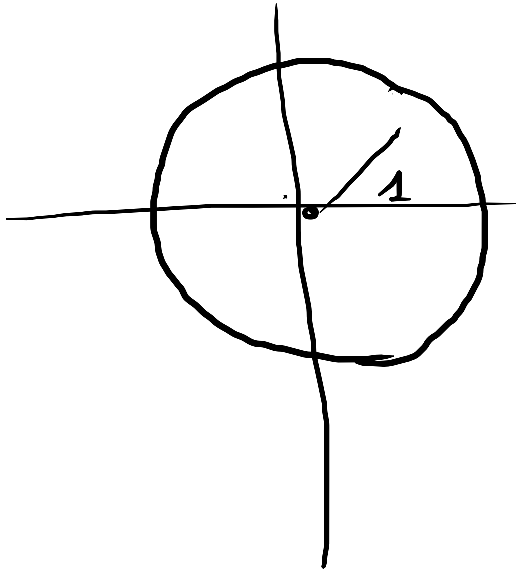
$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & x \neq 0 \\ \pi/2 & x = 0 \quad y > 0 \\ \frac{3}{2}\pi & x = 0 \quad y < 0 \end{cases}$$

Una curva nel piano può essere parametrizzata tramite un parametro t e può venir descritta sia in coordinate cartesiane che in coordinate polari.

$$t \longrightarrow \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$0 \leq t < 2\pi$$

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = t \end{cases}$$



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{2\rho^3\cos^3\theta - \rho^3 \operatorname{sen}^3\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta} =$$

$(\rho \ , \ \theta)$ coordinate polari

$x = \rho \cdot \cos\theta \qquad y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta$

$(x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow \boxed{\rho \to 0}$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^{\cancel{3}}(2\cos^3\theta - \operatorname{sen}^3\theta)}{\cancel{\rho^2}\underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{=1}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho \cdot \underbrace{(2\cos^3\theta - \operatorname{sen}^3\theta)} = 0$$

Def $\quad f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad U$ aperto

$$P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in U$$

diremo che f è continua in $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \iff$

$$\lim_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \to (x_1^0, \dots, x_n^0) \\ P \qquad\qquad P_0}} f(\overset{P}{\overbrace{x_1, \dots, x_n}}) = f(\overset{P_0}{\overbrace{x_1^0, \dots, x_n^0}})$$

$$\boxed{\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)}$$

Continuano a valere le proprietà delle funzioni continue

Se f è continua in ogni punto di U, allora si dice che f è continua in U.

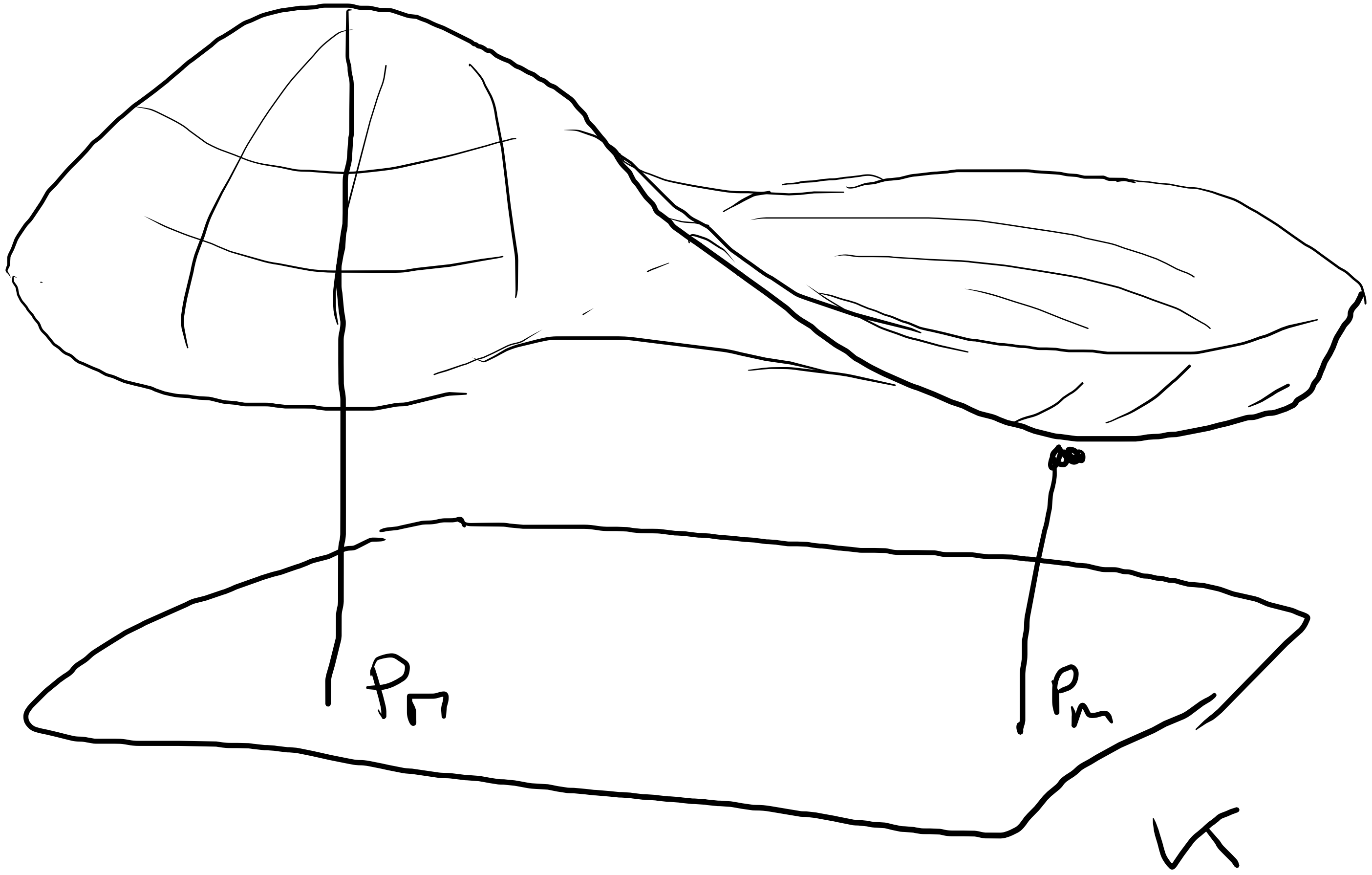
In particolare se U è un insieme CHIUSO e LIMITATO

allora vale la seguente generalizzazione del

Teorema di Weierstrass

Sia f continua in un insieme chiuso e limitato K.

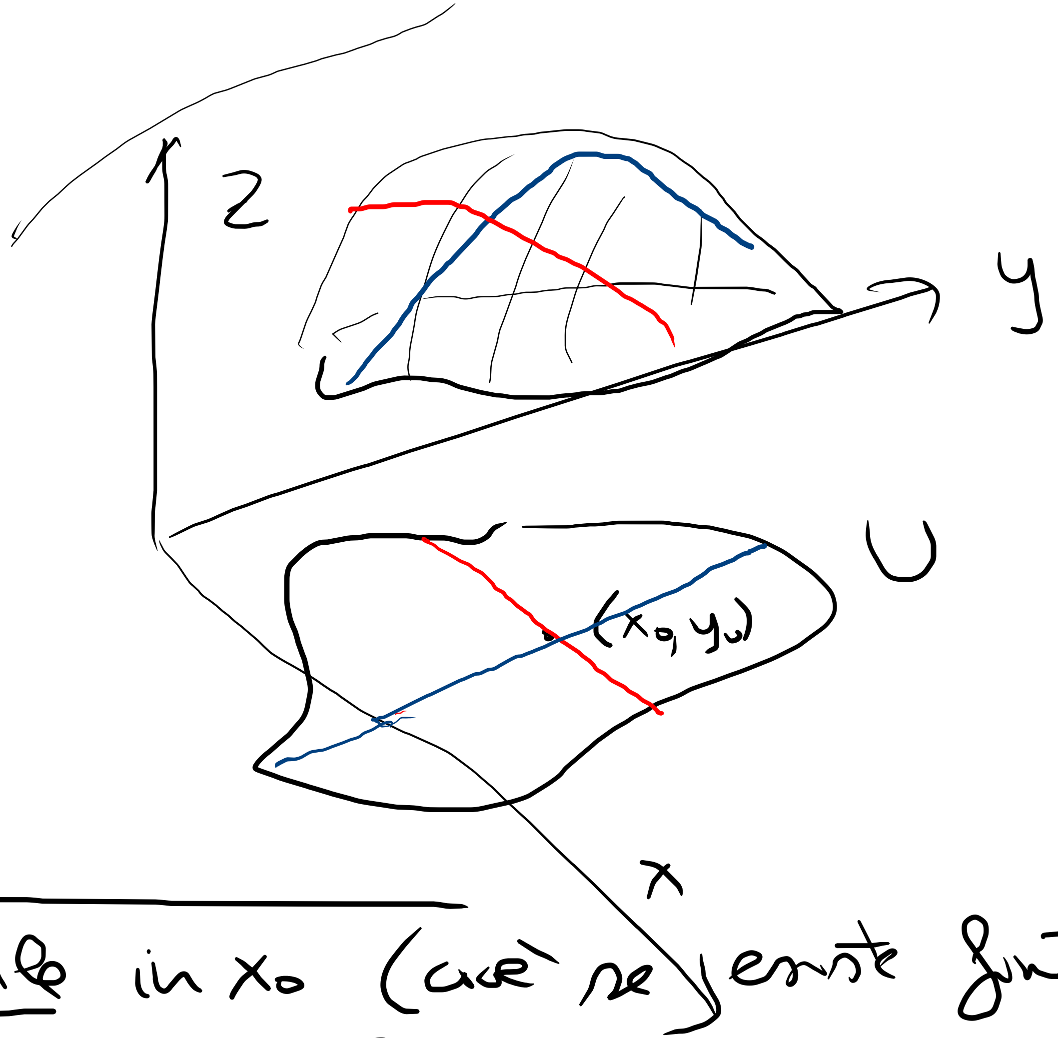
Allora f è dotata di massimo e di minimo in K, ossia esiste $P_m \in K$ $P_M \in K$ tale che $f(P_m) \leq f(P) \leq f(P_M)$
$\forall P \in K$.



p_M
p_m
V

Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in U$

<u>U aperto</u>



$\boxed{1}$ $x \longmapsto f(x, y_0)$

$\boxed{2}$ $y \longmapsto f(x_0, y)$

Se $\underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap}{x}} \longmapsto f(x, y_0) \in \mathbb{R}$ è <u>derivabile</u> in x_0 (cioè se esiste finito il limite del rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ al tendere di h a zero) diremo che f ha derivata parziale rispetto a x in (x_0, y_0)

Similmente se

$y \mapsto f(x_0, y)$ è derivabile in y_0 (ovvero se esiste finito il limite del rapporto incrementale $\dfrac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$ al tendere di k a zero) diremo che f ha derivata parziale rispetto a y in (x_0, y_0)

Notazione

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0, y_0)$$

de f ... de x

derivata parziale di f rispetto a x calcolata in (x_0, y_0)

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = f_y(x_0, y_0)$$

derivata parziale di f rispetto a y calcolata in (x_0, y_0).

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \underline{\text{Dom} f = \mathbb{R}^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{(x^2+y^2)^{1/2}} = \underbrace{\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{-1/2}} \cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

regola della catena

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)^{1/2} = \frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot \cancel{2}y =$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ho per dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

L'esistenza delle sole derivate parziali in (x_0,y_0) per f NON garantisce la continuità di f in (x_0,y_0).

Es

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] \underline{\underline{0}} & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

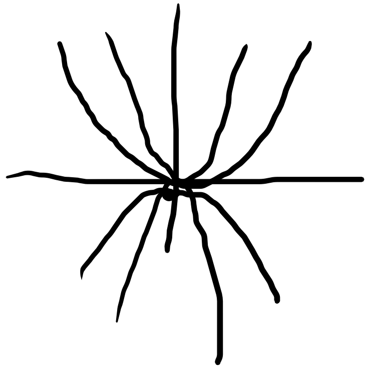
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h+0,0)-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)} = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,0+k) - \overset{=0}{f(0,0)}}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0}{k} = 0$$

Tuttavia f non è continua in $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}\right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\boxed{y = a x^2}$



$$\left. f \right|_{(x, ax^2)} = \frac{x^2 a x^2}{x^4 + a^2 x^4} = \frac{\cancel{x^4} \cdot a}{\cancel{x^4}(1+a)} = \frac{a}{1+a^2}$$

$a = 1 \longrightarrow 1/2 \qquad a = 0 \to 0$

$$f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) = \underbrace{h \cdot f_x(x_0, y_0)} + R$$

$$f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \underbrace{k\, f_y(x_0, y_0)} + R'$$

$$\underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)} = h \cdot f_x(x_0, y_0) + k\, f_y(x_0, y_0) + \tilde{R}$$

Def Diremo che $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, U aperto, è DIFFERENZIABILE in $(x_0, y_0) \in U$ se

f ha derivate parziali rispetto a x e a y in (x_0,y_0) e se

presi $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, allora

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = h \cdot f_x(x_0,y_0) + k f_y(x_0,y_0) + \tilde{R}(h,k)$$

con
$$\boxed{\lim_{(h,k)\to 0} \frac{\tilde{R}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0}$$

Oss Se f è differenziabile in $(x_0,y_0) \Rightarrow f$ è continua in (x_0,y_0)

Prop Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ U aperto dotata di derivate parziali (rispetto a x e rispetto a y) in (x_0, y_0) che risultino CONTINUE in (x_0, y_0). Allora f è differenziabile in (x_0, y_0).

So f differentiable in (x_0, y_0)

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \underbrace{(x-x_0)\cdot \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}}_{=\,\varphi(x,y)} + \tilde{R}$$

$h = x - x_0 \qquad k = y - y_0$

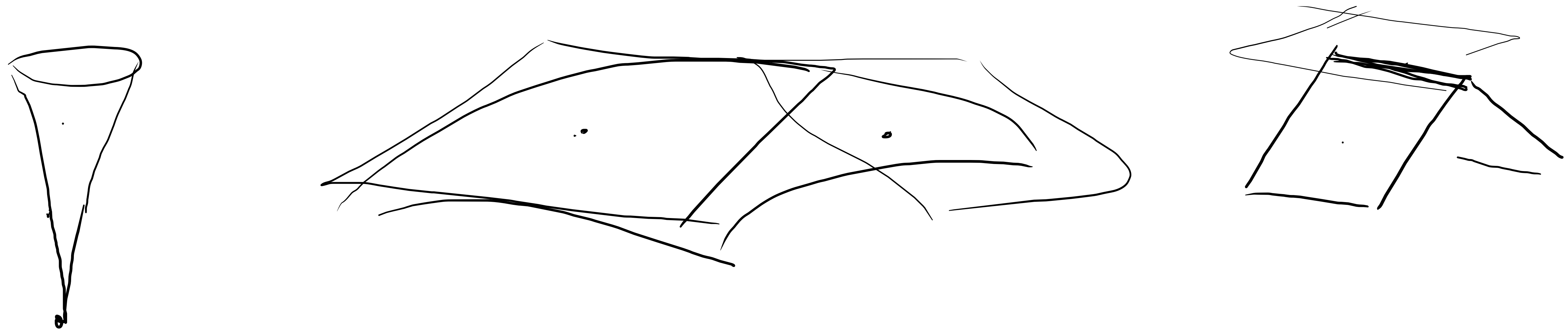
$$\boxed{\varphi(x,y) + f(x_0,y_0) = f(x,y) - \tilde{R}}$$

$$\boxed{(x-x_0)\cdot a + (y-y_0)\cdot b + z_0} = f(x,y) - \tilde{R}$$

$$\underbrace{ax + by + \underbrace{z_0 - ax_0 - by_0}}_{=c} = f(x,y) - \widehat{R}$$

$$\boxed{z = \varphi(x,y) + f(x_0,y_0)}$$

ep. PIANO tangente al grafico di f



Il piano tangente dà delle informazioni sul grafico della superficie di f. Infatti se f ha in P_m (o P_M) un punto di minimo (o massimo) necessariamente il piano tangente al grafico di f in P_m (o P_M) deve essere parallelo al piano (x,y) ovvero

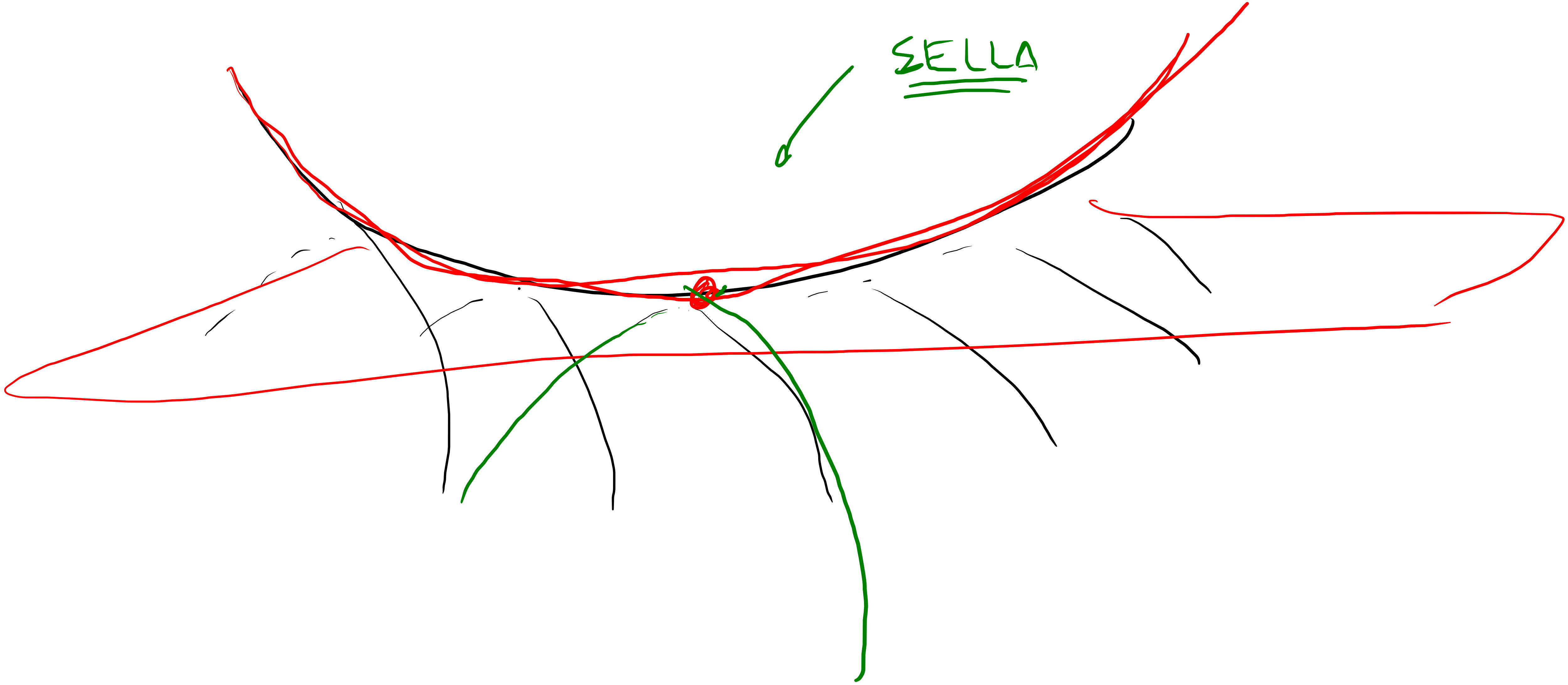
$$\boxed{z = z_0}$$

$$a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_M} = 0$$

$$b = 0 \qquad\qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_m} = 0$$

Se $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$ $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$ ma

(x_0,y_0) non è né un punto di massimo né un punto di minimo, diremo che (x_0,y_0) è un punto di SELLA


SELLA

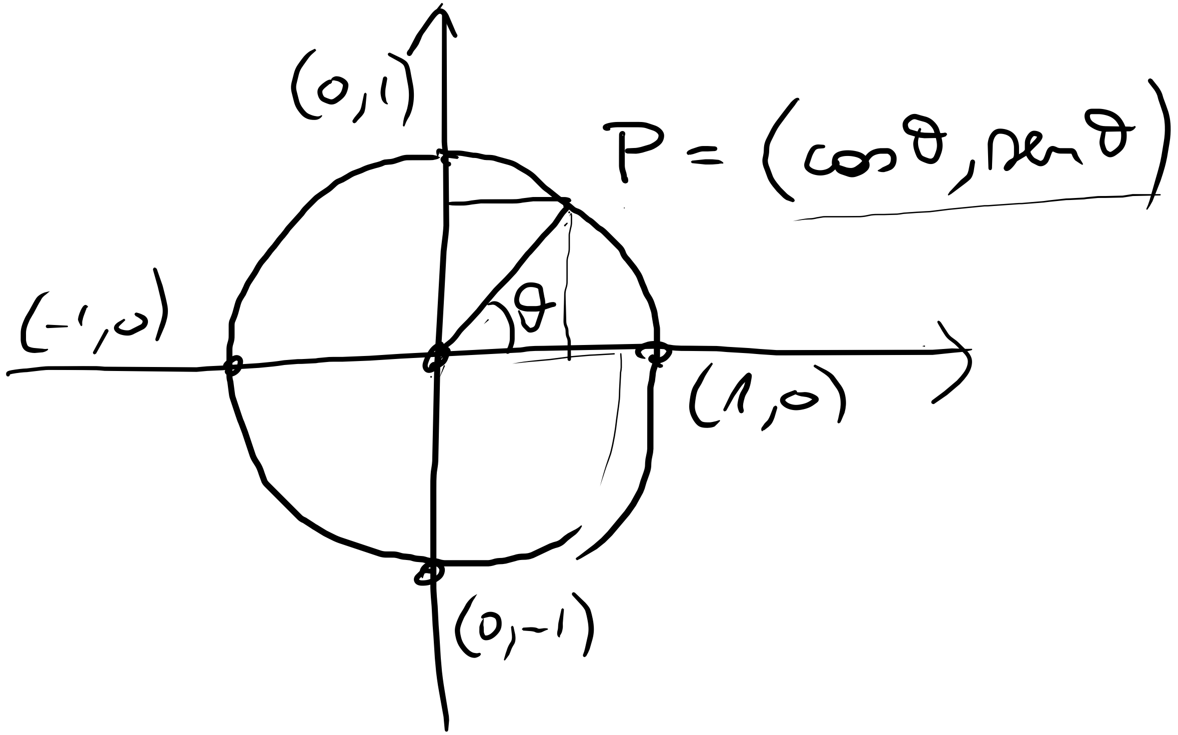
$$\boxed{f(x,y) = y^2 - x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

entrambe le derivate parziali di f si annullano in $(0,0)$, ma $(0,0)$ è un punto di sella per f

Infatti è un punto di MINIMO per $f|_{x=0}$ ed è un punto di MASSIMO per $f|_{y=0}$.

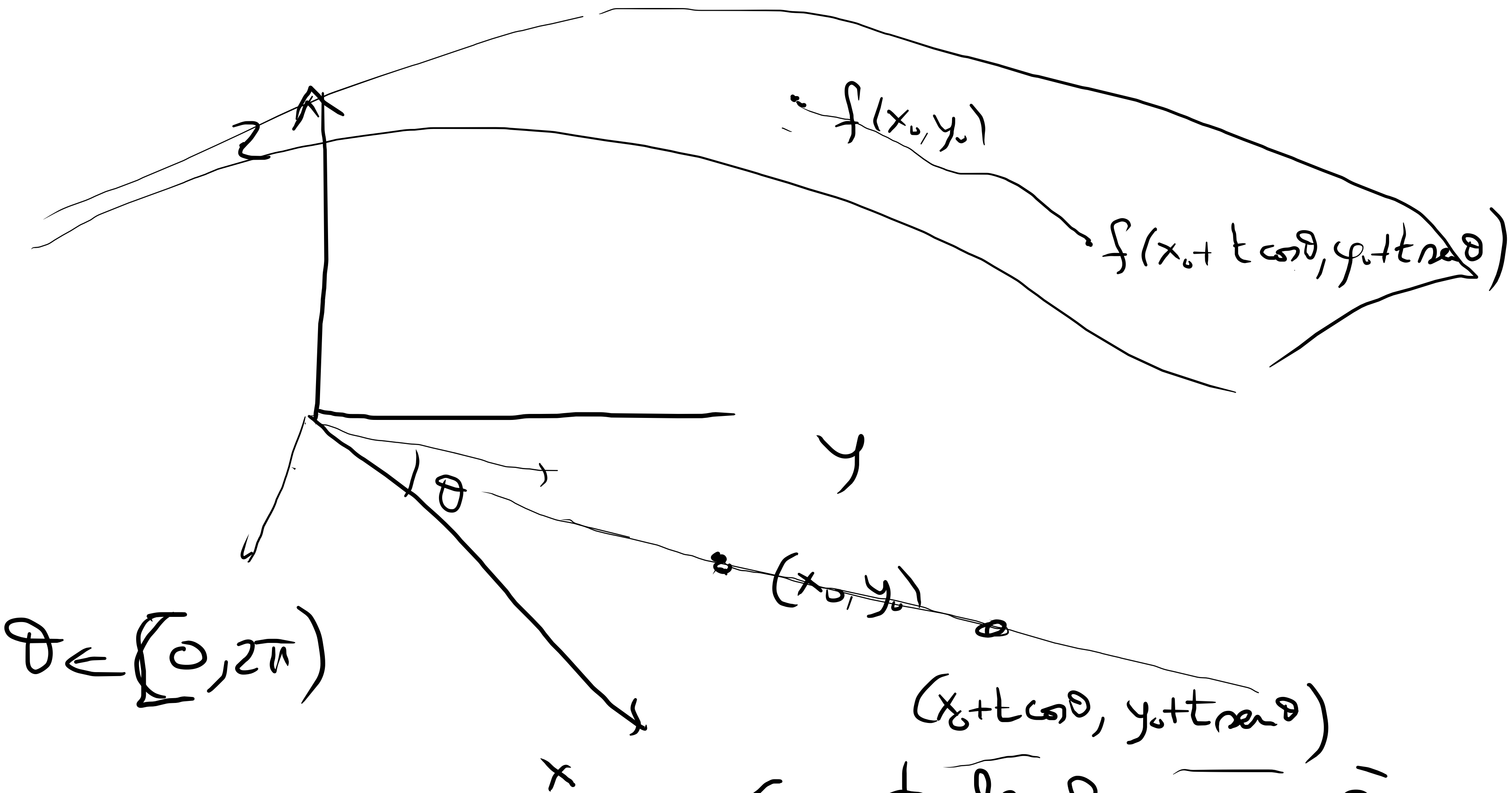
Consideriamo un generico punto sulla circonferenza unitaria del piano



$f(x_0 + t\cos\theta,\ y_0 + t\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$- f(x_0, y_0)$

è l'incremento di f nella direzione individuata da θ in (x_0, y_0)



Fissato (x_0,y_0) e $\theta\in[0,2\pi)$

$$t \mapsto f(x_0+\underbrace{t\cos\theta}_{h}, y_0+\underbrace{t\,\mathrm{sen}\,\theta}_{k})$$

Se tale funzione è derivabile rispetto a t in $t=0$ allora il valore della derivata si dice DERIVATA DIREZIONALE di f in (x_0,y_0) lungo la direzione individuata da θ.

In particolare se f è DIFFERENZIABILE in (x_0,y_0) allora

$$f(x_0+\underbrace{t\cos\theta}_{h}, y_0+\underbrace{t\,\mathrm{sen}\,\theta}_{k}) - f(x_0,y_0) = t\cos\theta \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + t\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + R$$

La derivata direzionale di f lungo θ in (x_0,y_0) che si indica con $D_\theta f(x_0,y_0)$ vale

$$\boxed{\cos\theta}\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \boxed{\mathrm{sen}\,\theta}\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$\theta=0$ $\boxed{\cos\theta=1 \quad \mathrm{sen}\,\theta=0}$ $\theta=\pi/2$

$$\boxed{D_0 f = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad D_{\pi/2} f = \frac{\partial f}{\partial y}}$$

Derivate successive alle prime

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}} \qquad \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}} \qquad \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = f_{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{xy}$$

Se f ha derivate seconde miste $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right)$ continue in (x_0, y_0) allora esse sono uguali

Teorema di Schwarz

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{0 - \frac{xy}{\sqrt{x^2+y}}}{(x^2+y^2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{0 - \frac{yx}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

Si considera $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dotata di derivate seconde in $(x_0, y_0) \in U$

Diremo MATRICE Hessiana di f in (x_0, y_0) la tabella così formata

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

Oss Se possiamo applicare il Teorema di Schwarz

$$\boxed{f_{xy} = f_{yx}}$$

Es

$$f(x,y) = y^2 - x^2$$

$f_x = -2x$ $\qquad$ $f_y = 2y$

$f_{xx} = -2$ $\qquad$ $f_{yy} = 2$

$f_{xy} = 0$ $\qquad$ $f_{yx} = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Es $f(x,y) = yx^3 - 2y^2$

$f_x = 3yx^2$ $f_y = x^3 - 4y$

$f_{xx} = 6xy$ $f_{yy} = -4$

$f_{xy} = 3x^2$ $f_{yx} = 3x^2$

$$H_f = \begin{bmatrix} 6xy & 3x^2 \\ 3x^2 & -4 \end{bmatrix}$$

Consideriamo (x_0, y_0) tale che

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = 0 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0$$

$$\boxed{(f_x, f_y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)}$$ è detto GRADIENTE di f

Sia (x_0, y_0) un punto che annulla il gradiente di f.

Sia

$$H_f = \left.\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Se $\Delta_H = \left(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy} \cdot f_{yy} \right)\Big|_{(x_0,y_0)} \neq 0$.

allora

1. $\Delta_H > 0$
   - e $f_{xx}\big|_{(x_0,y_0)} > 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ MINIMO LOCALE di f
   - e $f_{xx}\big|_{(x_0,y_0)} < 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ MASSIMO LOCALE di f

2. $\Delta_H < 0$

(x_0,y_0) è di SELLA per f.

① $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$

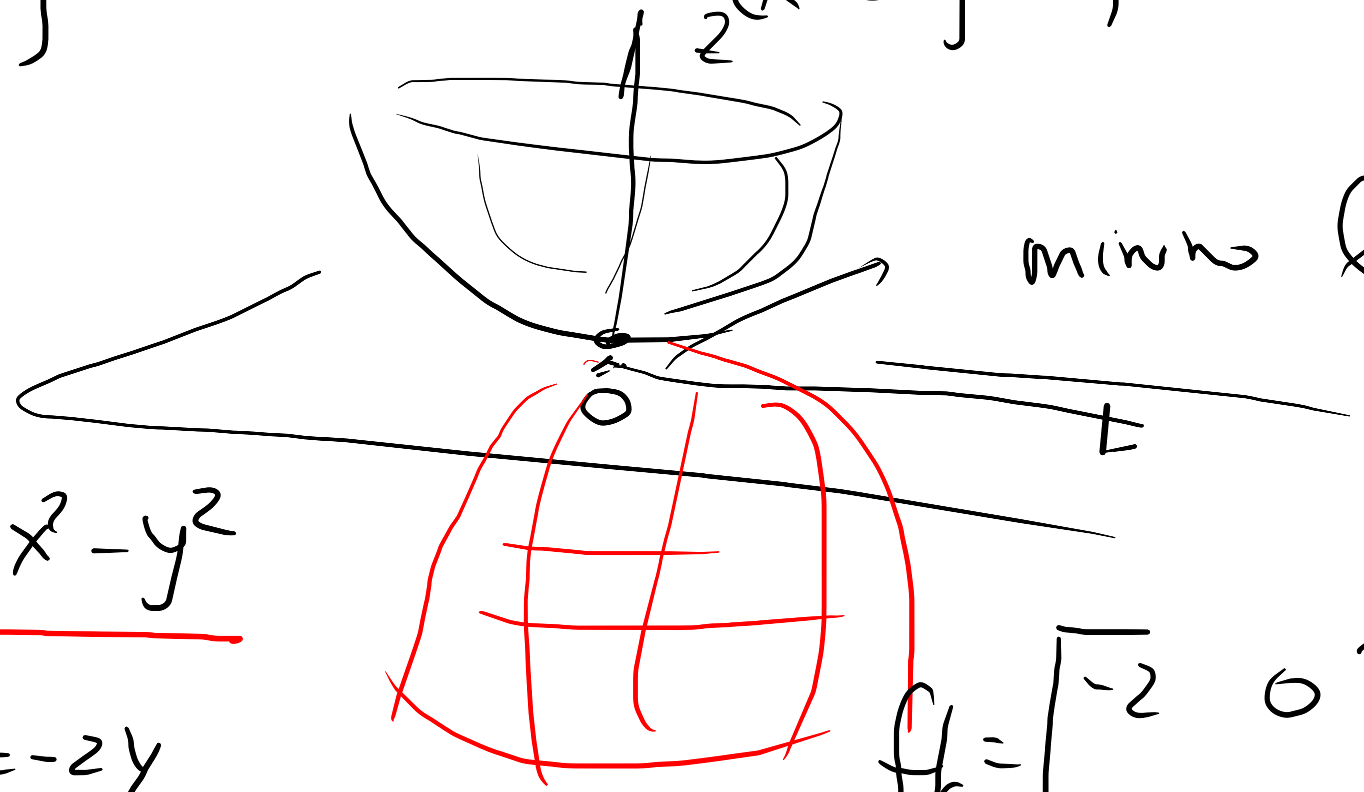
$\text{grad} f = (0,0) \Leftrightarrow$

$(x=0 \quad y=0)$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$f_{xx} = 2 > 0$

$\Delta_f = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$



minimo local

② $f(x,y) = -x^2 - y^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$

$H_f = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\Delta_f > 0$

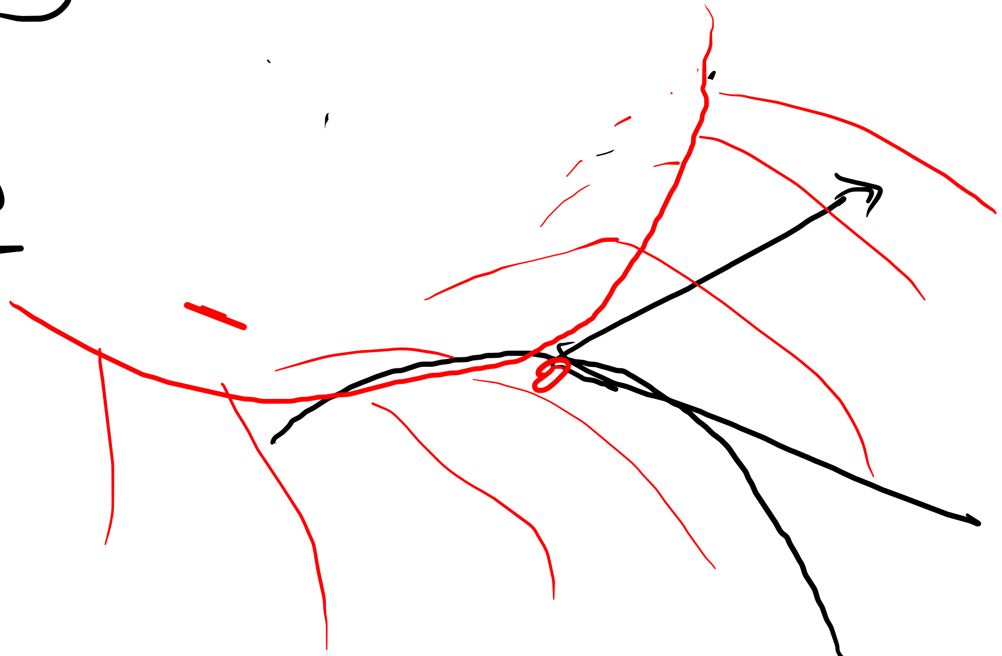
$f_{xx} < 0$

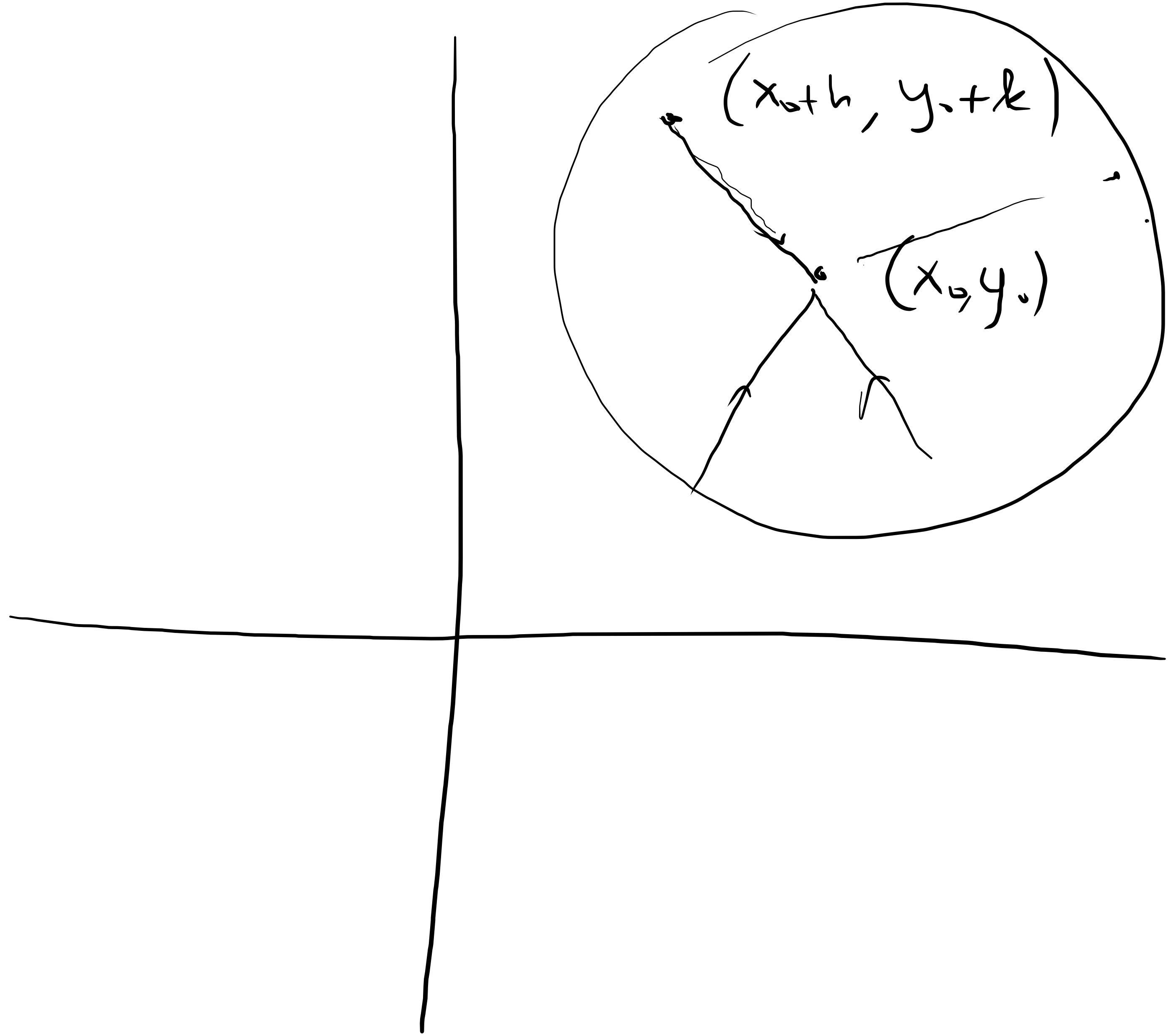
③ $f(x,y) = x^2 - y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \qquad \text{grad} f = (0,0) \iff x=0 \; y=0$

$H_f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\Delta_f < 0}$

$\Rightarrow (0,0)$ punto di sella





$$f(x,y) \to f(x_0,y_0)$$

$$(x,y) \to (x_0,y_0)$$