19 Novembre

Teorema. Sia $f: I \to \mathbb{R}$. Sono equiv

1) $f((1-t)x_0 + t x_1) \leq (1-t) f(x_0) + t f(x_1)$

$\forall x_1, x_0 \in I$ e $\forall t \in [0,1]$

2) $\forall x_1 < y < x_2$ in I si ha

$$\frac{f(x_1) - f(y)}{x_1 - y} \leq \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y}$$

3) $\forall y \in I$ la funzione

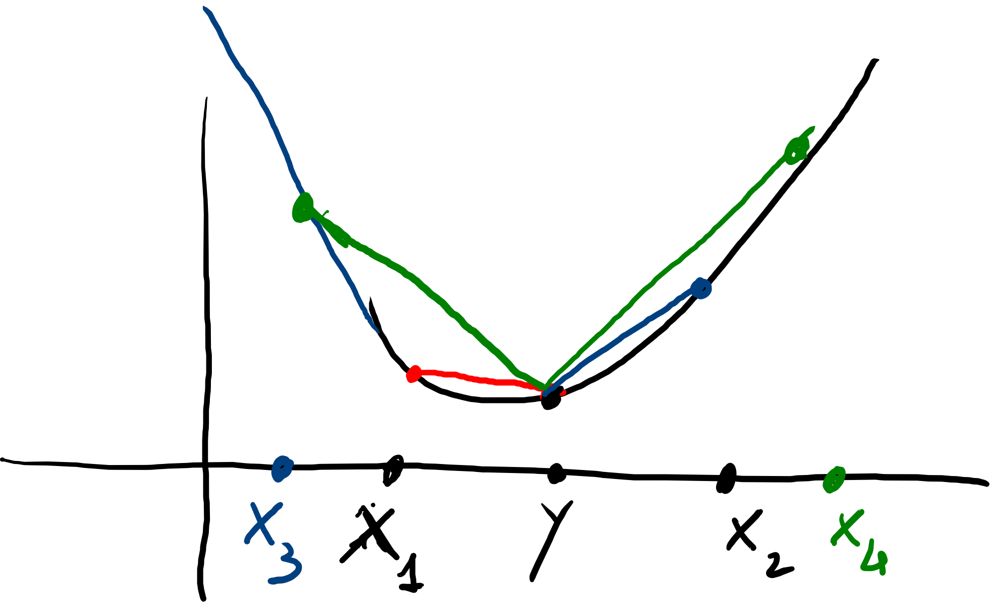
$$x \longrightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$ definito in $I \setminus \{y\}$,

è una funzione crescente

3) $\Longrightarrow$ 2) (banalmente), poiché

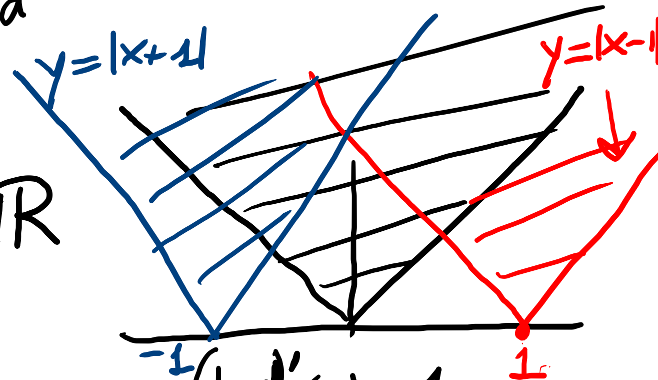
$x_1 < y < x_2$ la condizione 3) implica

$$\frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y} \leq \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}$$



x_3
x_1
y
x_2
x_4

Corollario Sia $f: I \to \mathbb{R}$, convessa in I. Allora in ogni punto x_0 all'interno di I sono definite $f'_s(x_0) \leq f'_d(x_0)$ e stanno nella relazione indicata



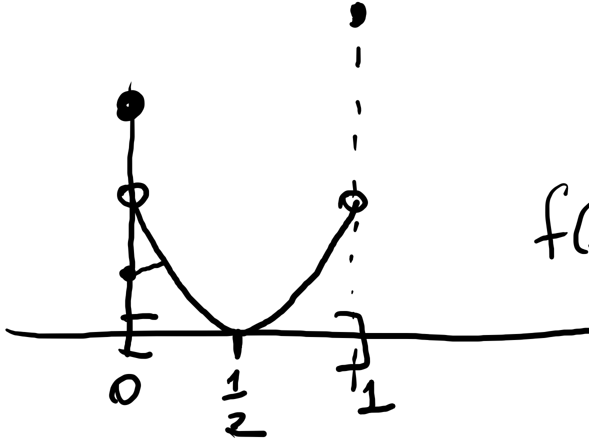
Esempio $|x| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(|x|)' = \begin{cases} -1 & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x>0 \end{cases}$$

$$(|x|)'_d(0) = 1$$

$$(|x|)'_s(0) = -1$$

Esempio

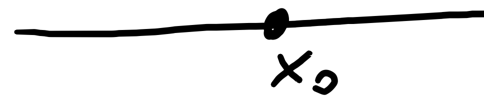


$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 & \text{per } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \end{cases}$$

f è discontinua in 0 e 1.

$\cancel{f'_s(0)}$ $\quad f'_d(0)$ non esiste, $f'_s(1)$ non esiste.

Dim. Sia x_0 interno

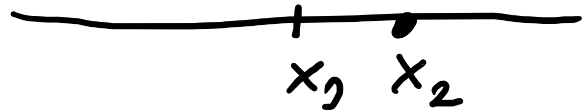


I limiti $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ e

$\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ esistono perché

$\displaystyle x \to \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ è crescente in $I \setminus \{x_0\}$

In particolare



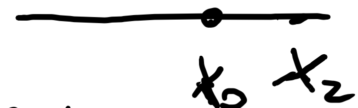
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \sup\left\{ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} : x < x_0 \right\}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \inf\left\{ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} : x > x_0 \right\}$$

Sia $x_2 > x_0$. Allora $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$

$\forall \quad x < x_0 < x_2$.

Per la 2° proprietà del sup



ho
$$\underbrace{\sup\left\{ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} : x<x_0 \right\}}_{f'_s(x_0)} \le \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} < \infty$$

Abbiamo appena dimostrato che
$$f'_s(x_0) \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \forall\ x > x_0 .$$
Per la 2° proprietà dell'inf

$$f'_s(x_0) \leq \inf \left\{ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} : x > x_0 \right\} =$$

$$= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0)$$

Quindi $\quad f'_s(x_0) \leq f'_d(x_0) \quad \forall\, x_0$ interno ad I.

Teor Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e supponiamo che $f'(x)$ esista $\forall x$. Sono equivalenti:

a) f è convessa in (a,b)

b) f' è crescente in (a,b)

Corollario Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e t.c. $f''(x)$ esiste $\forall x$. Sono equivalenti

α) f convessa $\qquad$ β) $f''(x)\geq 0 \ \forall x\in(a,b)$.

1) $f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = 2x\, e^{x^2}$

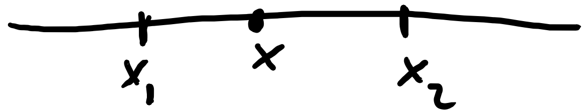
$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} = 2(1+2x^2)\, e^{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = x^2$, $\quad f''(x) = 2 > 0$

a) f convessa in (a,b)

b) f' crescente in (a,b)

a) $\Rightarrow$ b) Dobbiamo dimostrare che $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ se $x_1 < x_2$.

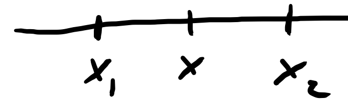


Perché $y \to \dfrac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1}$ è crescente

Per $x_1 < x < x_2$ ho

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$



$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} .$$

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Sia $x > x_1$ $x \neq x_2$. Allora

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$$

Concludiamo

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \lim_{x\to x_2} \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2} = f'(x_2)$$

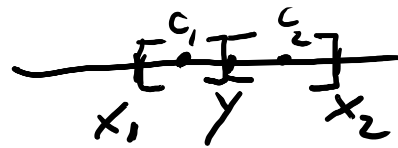
$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2)$$

$\forall \quad x_1 < x_2$ in (a,b). Quindi $f'(x)$ è crescente.

b) $\Rightarrow$ a) Sia f' crescente in (a,b)

Per dimostrare che f è convessa basta dimostrare che $\forall$ terna $x_1 < y < x_2$ si ha

$$\frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y} \le \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}$$



Applico Lagrange in $[x_1, y]$ e in $[y, x_2]$

Esistono $c_1 \in (x_1, y)$ e $c_2 \in (y, x_2)$ t.c.

$$f'(c_1) = \frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y}, \quad f'(c_2) = \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}, \quad c_1 < c_2$$

$$f'(c_1) \le f'(c_2)$$

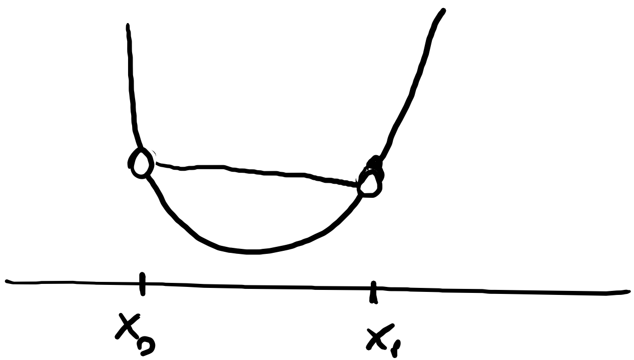
$$c_1 < c_2 \implies f'(c_1) \leq f'(c_2)$$

$$\implies \frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y} \leq \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y)}$$

$\forall \quad x_1 < y < x_2$.

Def Sia f convessa in I. Allora f è strettamente convessa se $\forall\ x_0 \neq x_1$ in I si ha

$$f((1-t)x_0+t x_1) < (1-t) f(x_0) + t f(x_1) \qquad \forall\ t \in (0,1)$$



Teor $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, differenziabile in (a,b). Sono equiv

a) f strett. convessa in (a,b)

b) f' strettamente crescente in (a,b).

Corollario $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $f''(x)$ esiste $\forall x\in(a,b)$. Allora

se $f''(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$ la funzione f e' strettamente convessa in (a,b).

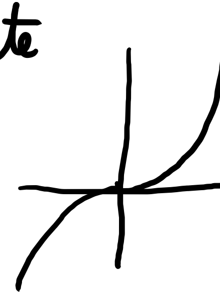
Esempio

$f(x) = x^{2n} \qquad n \geq 2$

$(x^4, x^6, x^8, \dots)$

$f'(x) = 2n\, x^{2n-1}$ è strettamente crescente

$(x^4)' = 4\, x^3$ è strettamente crescente

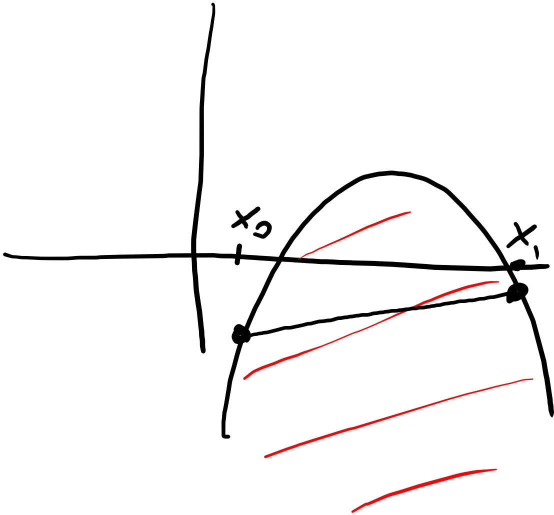


$f''(x) = 2n\,(2n-1)\, x^{2(n-1)} \Big|_{x=0} = 0$

$(x^4)'' = 12\, x^2$

$f: I \to \mathbb{R}$

Def f è concava se vale una delle seguenti condizioni, che sono equivalenti



1) $f((1-t)x_0+tx_1) \geq (1-t)f(x_0)+tf(x_1)$

$\forall\ x_0, x_1 \in I$ e $\forall\ t \in [0,1]$

2) $-f(x)$ è convessa in I

<u>Teor</u> Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenziabile in (a,b). Sono equiv:

a) f è concava in (a,b)

b) f' è decrescente in (a,b).

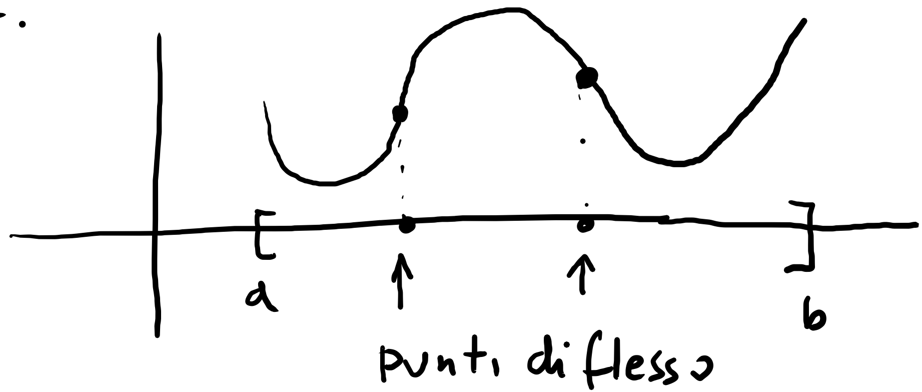
<u>Corollario</u> Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ t.c. $f''(x)$ esiste $\forall x\in(a,b)$. Sono equiv

α) f è concava in (a,b)

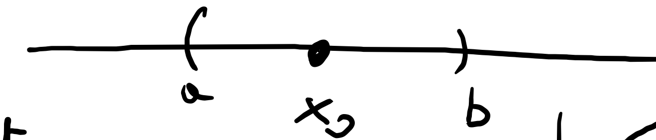
β) $f''(x)\le 0 \quad \forall x\in(a,b)$.

Di solito dato $f: I \to \mathbb{R}$, I un intervallo, f non è né convessa né concava su tutto I.

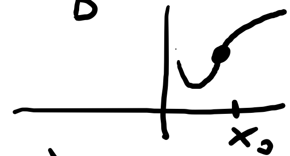
Semmai è convessa o concava in intervalli più piccoli di I.



Def Sia $f: I \to \mathbb{R}$. Un punto x_0 interno ad I è detto punto di flesso se esiste un intervallo $(a,b) \subseteq I$ con $(a,b) \ni x_0$

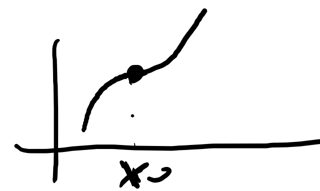


e se si ha uno delle seguenti alternative



1) in (a, x_0) f è convessa e in (x_0, b) è concava

2) (a, x_0) f è concava in (x_0, b) è convessa



Teor Sia $f: I \to \mathbb{R}$ t.c. $f''(x)$ esiste $\forall x \in (a,b)$.

Se $x_0 \in (a,b)$ è un punto di flesso allora $f''(x_0) = 0$.