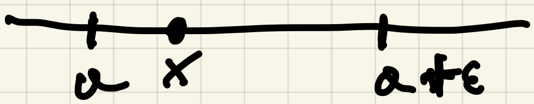
$a \in (a,b)'$

$(a,b) = \{x : a<x<b\}$

Sia $\varepsilon > 0$ e consideriamo $a+\varepsilon$



Se $a+\varepsilon \geq b$ allora un qualsiasi $x_0 \in (a,b)$ ha la proprietà che

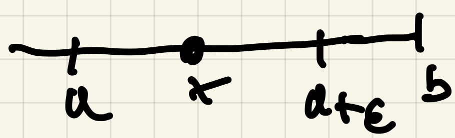
$$0 < x_0 - a < b - a \leq \cancel{a} + \varepsilon - \cancel{a} = \varepsilon$$

Conclusione: $\forall \; x \in (a,b)$ ho

$$|x-a| < \varepsilon$$

$$0 < x - a < \varepsilon$$

Se invece $0 < a + \varepsilon < b$



preso un qualsiasi $x \in (a, a+\varepsilon)$ ho

$$0 < x - a < a + \varepsilon - a = \varepsilon$$

In ogni caso abbiamo trovato che $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \; x \in (a,b)$ t.c. $0 < x - a < \varepsilon$

Esercizio 10 (4.45) note

$X \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto t.c. $\exists\, T > 0$ t.c.

$$x \in X \Rightarrow x + nT \in X \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Dimostriamo che $\sup X = +\infty$.

$$+\infty = \lim_{n \to +\infty} (x + nT) = \sup \underbrace{\{x + nT : n \in \mathbb{Z}\}}_{\subseteq X}$$

$$\leq \sup X \leq +\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\sup X = +\infty}$$

Dimostriamo $\inf X = -\infty$

$$-\infty = \lim_{n \to -\infty} (x + nT) = \inf \overbrace{\{x + nT : n \in \mathbb{Z}\}}^{\subseteq X}$$

$$\geq \inf X \geq -\infty \Rightarrow \inf X = -\infty$$

Es 9.16

X un insieme finito, $f \in C^0(\mathbb{R})$ derivabile in $\mathbb{R} \setminus X$ con $f'(x) \geq 0$.

Allora f è crescente.

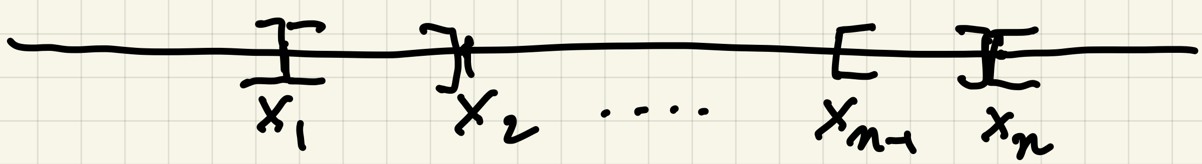
---

1) Supponiamo $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ con $n \geq 1$. Posso sempre assumere che

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n .$$

Voglio dimostrare che f è crescente.

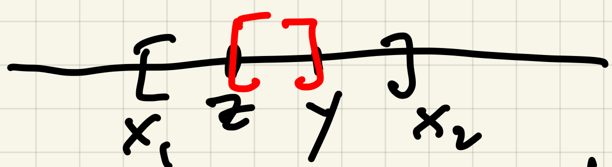
Sia $z < y$ due punti in $\mathbb{R}$.



$(*)$ $\mathbb{R} = \underbrace{(-\infty, x_1]}_{I_1} \cup \underbrace{[x_1, x_2]}_{I_2} \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n] \cup \underbrace{[x_n, +\infty)}_{I_{n+1}}$

Voglio dimostrare che $z < y \Rightarrow f(z) \leq f(y)$.

Se la coppia z, y appartiene ad uno degli intervalli sulla destra in $(*)$, cioè $z, y \in I_j$ per un j,



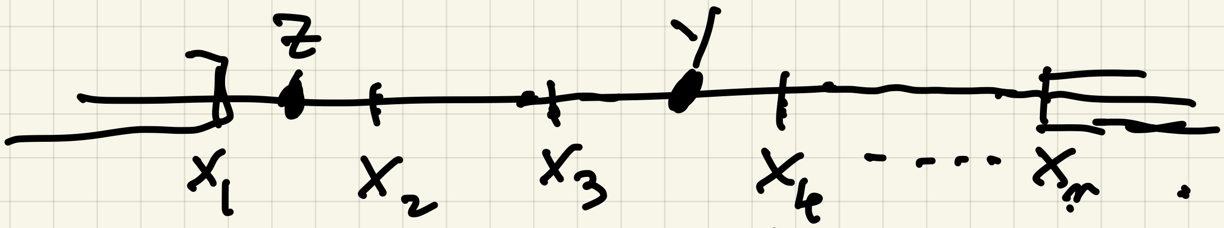
allora posso applicare Lagrange

per $f \in C^0([z,y])$, f' è definita in (z,y)

$\Rightarrow \exists\, c \in (z,y)$ t.c. $0 \leq f'(c) = \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geq 0 \Longrightarrow f(z) \leq f(y).$$

Supponiamo ora che z e y non appartengono al medesimo intervallo



Ma $z \in I_i$ e $y \in I_j$ $\quad i<j$

$j = i + k$ dove $k>0$

$$f(z) \leq f(x_i) \leq f(x_{i+1}) \leq \ldots\ldots \leq f(\inf I_j) \leq f(y)$$

$$\Longrightarrow \quad f(z) \leq f(y)$$

Es 6.11

$$X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 = \inf X \neq \min X$$

Allora 0 è un punto di accumulazione

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \text{ se } n > \frac{1}{\varepsilon} \implies 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} = \left| 0 - \frac{1}{n} \right|$$

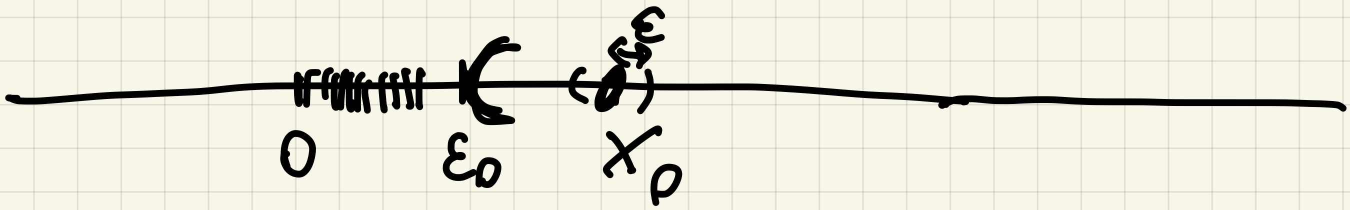
Così $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ un $\frac{1}{n} \in X$ t.c.

$$0 < \left| 0 - \frac{1}{n} \right| < \varepsilon.$$

$$0 \in X'$$

Infatti $X' = \{0\}$

$$\overline{X} = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$



Sia $x_0 \neq 0$ ad esempio $x_0 > 0$.

Sia $0 < \varepsilon_0 < x_0$

So che per $n > \frac{1}{\varepsilon_0}$ ho $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon_0$

Questo significa che in $[\varepsilon_0, +\infty)$ c'è solo un numero finito di elementi di X

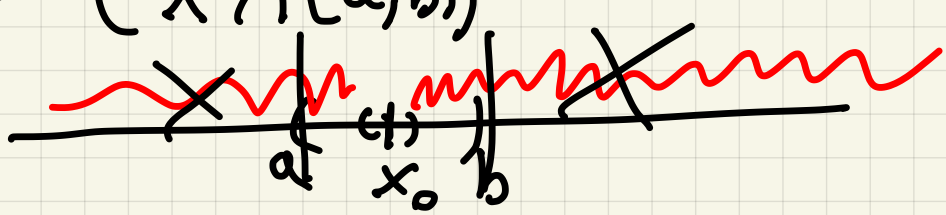
Se pongo $Y = \{\frac{1}{n} : \frac{1}{n} > \varepsilon_0\}$, Y è finito

$Y' = \emptyset$

se fosse $x_0 \in X'$ ovvero $x_0 \in Y'$!

Dimostrare che se $x_0 \in X'$, dove $X \subseteq \mathbb{R}$, allora $\forall\ a < x_0 < b$ deve essere

$$x_0 \in (X \cap (a,b))'$$



$f \in C^0(I)$, $f'(x)$ esiste $\forall x \in \mathring{I}$.

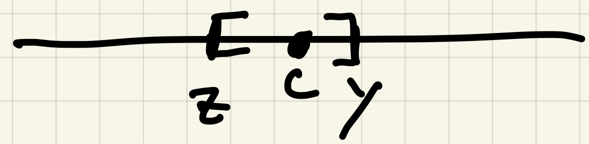
Sono equiv

1) f costante in I

2) $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathring{I}$

$1 \Rightarrow 2$ perchè $(c)' = 0$

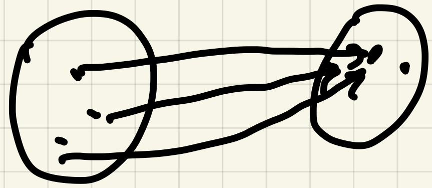
$2 \Rightarrow 1$ Applico Lagrange. Siano $z < y$ in I



$[z, y] \subseteq I$

$\Rightarrow f \in C^0([z,y])$ e f' esiste in (z,y). Applico Lagrange. $\exists\, c \in (z,y)$ t.c. $0 = f'(c) = \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y} \Rightarrow f(z) = f(y)$

Ho dimostrato che per ogni coppia $z < y$ in I si ha $f(z) = f(y)$. $\Rightarrow f$ costante

$f: X \to Y$ 

$f(x_1) = f(x_2)$ per ogni coppia $x_1 \neq x_2$ in X

$\Longrightarrow$ f e' costante

fisso $x_0 \in X$ e pongo $Y \ni c = f(x_0)$

Allora si ha $f(x) = c$ $\forall x \in X$

Perche se $x \neq x_0$ ho che $f(x) = f(x_0) = c$