



Elementi di trasmissione Numerica

Fulvio Babich (babich@units.it)

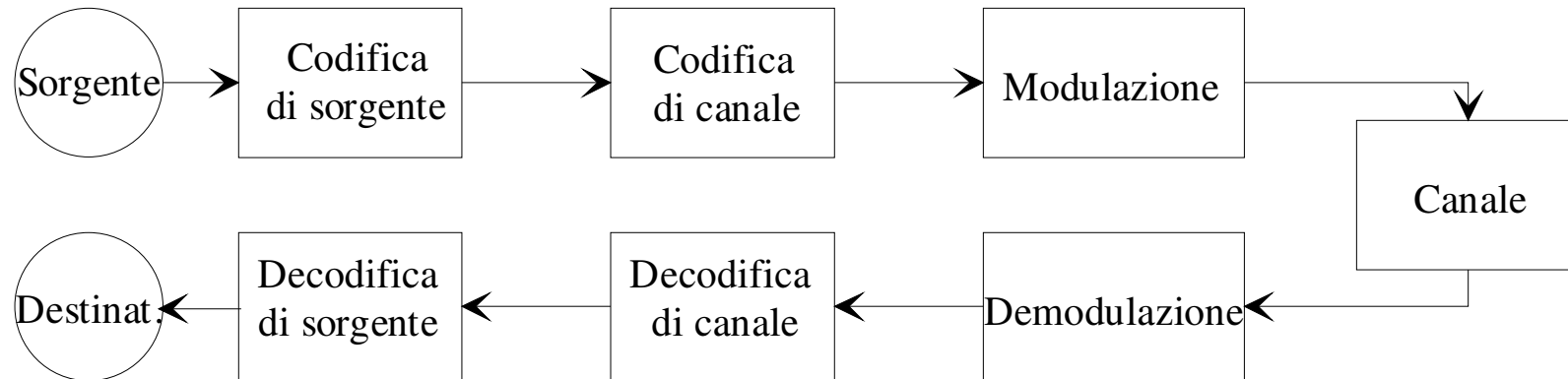
DIA – Università di Trieste



Riferimenti bibliografici

- J.G. Proakis, M. Salehi, *Fundamentals of communication systems*, Prentice Hall, 2013.
- J.G. Proakis, *Modern communication systems using MATLAB*, Cengage Learning - 2013.
- G. L. Stüber, *Principles of Mobile Communication*, Springer, 2011.
- R. Stewart, K. W. Barlee, D. S. W. Atkinson, *Software Defined Radio Using Matlab & Simulink and the Rtl-Sdr*, <http://www.desktopsdr.com/download-files>.

Schema a blocchi collegamento numerico



- **Codifica di sorgente:** compressione.
- **Codifica di canale:** Introduzione ridondanza in modo sistematico, per protezione contro gli errori (tasso di codifica: R_c (bit ingresso/bit uscita)).
- **Modulazione:** Operazione mediante cui viene associato un segnale, tempo continuo, ai simboli (numeri) emessi dalla sorgente, dopo l'eventuale compressione e codifica di canale.

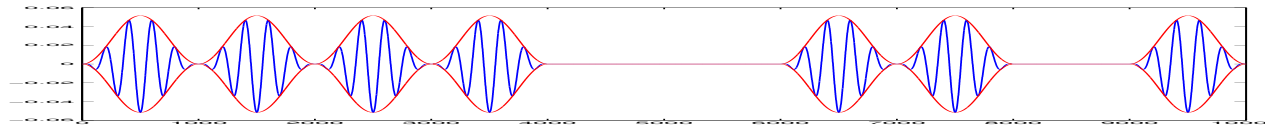


Segnale Numerico

- **Messaggio numerico:** successione discreta nel tempo di una grandezza che può assumere solo un insieme discreto e finito di $M=2^b$ valori.
- **Modulazione:** associa a ciascuno dei valori possibili una forma d'onda. Si ottiene un segnale tempo continuo, ampiezza continua, utilizzato per trasferire l'informazione di tipo numerico. Tale segnale numerico, talvolta viene detto 'analogico', pur non presentando esso alcuna analogia con il segnale tempo continuo, ampiezza continua da cui il segnale numerico è stato eventualmente ricavato mediante campionamento, quantizzazione e codifica.
- Il segnale giunge al ricevitore modificato (ritardo, attenuazione, distorsione, rumore, interferenza) e può essere interpretato erroneamente dal ricevitore (**errore di decisione**).
- Le prestazioni di un sistema di trasmissione numerica si misurano in termini di **tasso d'errore** o, più in generale, di statistica dell'errore.

Modulatore numerico

- Associa alla sequenza di numeri da trasmettere una successione di forme d'onde scelte in un insieme di dimensione finita $M=2^b$, con b intero. Ogni forma d'onda è associata a un gruppo di b bit consecutivi (*mapping*).



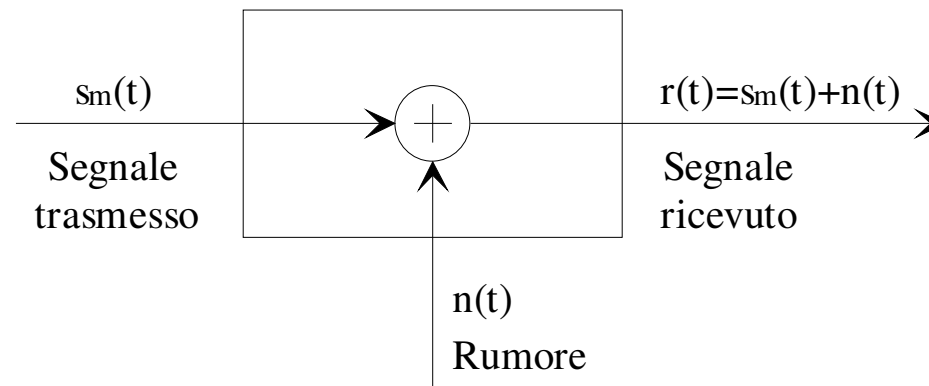
- La modulazione si dice **in banda base**, qualora il segnale prodotto abbia trasformata di Fourier in banda base, oppure in **banda traslata**.
- Parametri:
 - T [s]: **Intervallo di simbolo o di segnalazione**, (periodo di emissione delle forme d'onda).
 - $1/T$ [baud] o [simboli/s]: **tasso di trasmissione** in simboli al secondo.
 - W [Hz]: **banda occupata**.
- Il segnale tempo continuo, $x(t)$, prodotto dal modulatore è la generica realizzazione di un processo aleatorio ciclostazionario, in senso lato:
 $E[x(t + kT)] = E[x(t)]$, $E[x(t + kT)x(t + kT + \tau)] = E[x(t)x(t + \tau)]$, k intero.

Trasmissione su canale AWGN

Additive White Gaussian Noise



- **Ipotesi preliminari:**
 - Modulazione (*mapping*) senza memoria.
 - Modifiche sul segnale trasmesso: rumore additivo, gaussiano, bianco, di densità spettrale bilaterale $N_0/2$;
funzione di autocorrelazione $R(\tau) = \delta(\tau)N_0/2$.



- **Conseguenze:** decisione ottima simbolo per simbolo.



Modulazioni: parametri di riferimento (1)

- Parametri che caratterizzano una modulazione
 - **Tasso di emissione** (in simboli al secondo): $1/T$ [baud] (T è il tempo necessario per l'emissione di un simbolo; intervallo di segnalazione).
 - **Bit per simbolo** : b [bit di canale/simbolo].
 - **Forme d'onda distinte**: $M=2^b$ (da cui $b=\log_2 M$).
 - **Tasso di codifica** (di canale): R_c [bit di informazione/bit di canale].
 - **Tasso informazione**: $R=R_c \log_2 M=R_c b$ [bit informazione/simbolo].
 - **Tasso di emissione (bit informazione al secondo)**:
$$R_i=R/T$$
 [bit informazione/s].



Modulazioni: parametri di riferimento (2)

- Parametri che caratterizzano una modulazione (continua)

- **Banda disponibile:** W [Hz].

La banda minima occupata è pari a $f_N = \frac{1}{2T}$ [Hz]

dove f_N è detta frequenza di **Nyquist**.

- **Efficienza spettrale:** $r = \frac{R}{TW}$ [$\frac{\text{bit informazione/s}}{\text{Hz}}$]

- **Energia per bit di informazione:** detta E_{av} , l'energia media necessaria per l'emissione di un simbolo si ha:

$$E_b = \frac{E_{av}}{R_c \log_2 M} = \frac{E_{av}}{R} \quad [\text{joule}]$$



Progettare una modulazione

- Parametri
 - Tasso di emissione (in simboli al secondo): $1/T$ [baud].
 - Bit per simbolo : b [bit di canale/simbolo].
 - Forme d'onda distinte: $M=2^b$ (da cui $b=\log_2 M$).
 - Banda disponibile: W [Hz].

- Obiettivi
 - Minimizzare l'energia media, E_{av} , a parità di probabilità d'errore
 - Rispettare la banda assegnata: $B \leq W$ [Hz]
 - Definire la tecnica di demodulazione (ottima).



Lo spazio dei segnali

- Siano $x(t)$, $y(t)$ segnali complessi ad energia finita.
- **Norma (energia):** $\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$
- **Prodotto scalare:** $\langle x(t) y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$
- **Segnali ortogonali:** $\langle x(t) y(t) \rangle = 0$
- **Distanza (energia della differenza):** $d^2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t) - x(t)|^2 dt$



Un sistema di riferimento (1)

- $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t)$ ortonormali, $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij}$
- Una generica forma d'onda, $s_m(t)$, $m=1, \dots, M$, è esprimibile come combinazione lineare delle forme d'onda $\psi_n(t)$, $s_m(t) = \sum_{n=1}^N s_{mn} \psi_n(t)$, dove $s_{mn} = \langle s_m(t) | \psi_n(t) \rangle$
- Una generica forma d'onda, $s_m(t)$, viene così rappresentata mediante un vettore $\mathbf{s}_m = (s_{m1}, s_{m2}, \dots, s_{mN})$, le cui componenti possono essere utilizzate per determinare le quantità d'interesse.
 - Norma: $\|s_m(t)\|^2 = \sum_{n=1}^N |s_{mn}|^2$
 - Prodotto scalare: $\langle s_h(t) | s_k(t) \rangle = \sum_{n=1}^N s_{hn} s_{kn}^*$
 - Distanza: $d^2(s_h(t), s_k(t)) = \sum_{n=1}^N |s_{hn} - s_{kn}|^2$



Un sistema di riferimento (2)

- $N \leq M$ (uguale se e solo se le M forme d'onda sono ortogonali).
- Modulazione d'ampiezza: $N=1$, $\psi(t) = g(t) \cos(2\pi f_c t) \sqrt{2/E_g}$
- Modulazioni di fase, ampiezza e fase: $N=2$,
 $\psi_1(t) = g(t) \cos(2\pi f_c t) \sqrt{2/E_g}$
 $\psi_2(t) = g(t) \sin(2\pi f_c t) \sqrt{2/E_g}$
- Modulazione di frequenza: $N=M$ $\psi_n(t) = g(t) \cos(2\pi f_n t) \sqrt{2/E_g}$



Procedura di Gram-Schmidt

- $n = 0$

$$\text{for } m = 1:M \quad d_m(t) = s_m(t) - \sum_{i=1}^{m-1} s_{im} \psi_i(t)$$

$$\text{if } d_m(t) \neq 0, \quad n = n + 1, \quad \psi_n(t) = \frac{d_m(t)}{\sqrt{E_{d_m}}}$$

- Esempio (modulazione di durata): $s_m(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - mT/2M}{mT/M}\right), \quad m = 1 \dots M$

$$\psi_n(t) = \sqrt{\frac{M}{T}} \operatorname{rect}\left(\frac{t - (2n-1)T/2M}{T/M}\right), \quad n = 1 \dots M \quad s_{mn} = \begin{cases} A\sqrt{\frac{T}{M}} & n = 1 \dots m \\ 0 & n = m+1 \dots N \end{cases}$$

$$\text{Se poniamo } M=2, T=1, A=1 \quad s_1(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t-1/4}{1/2}\right) \quad s_2(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t-3/4}{1/2}\right)$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{2} \operatorname{rect}\left(\frac{t-1/4}{1/2}\right) \quad \psi_2(t) = \sqrt{2} \operatorname{rect}\left(\frac{t-3/4}{1/2}\right) \quad \mathbf{s}_1 = (1/\sqrt{2}, 0) \quad \mathbf{s}_2 = (0, 1/\sqrt{2})$$



Demodulatore (coerente) a correlatore

- Ricava la **statistica sufficiente**:
supponiamo di trasmettere (in un generico intervallo di segnalazione di durata T) $s_m(t)$ e di ricevere $r(t) = s_m(t) + n(t)$: il demodulatore coerente calcola
$$r_n = \langle r(t)\psi_n(t) \rangle = \int_0^T s_m(t)\psi_n(t)dt + \int_0^T n(t)\psi_n(t)dt = s_{mn} + n_n, \quad n = 1, \dots, N$$
- Le componenti n_n sono variabili aleatorie **gaussiane, indipendenti, a valore medio nullo**, e con **varianza $N_0/2$** (simmetria sferica).

$$E[n_k n_h] = E\left[\int_0^T n(t)\psi_k(t)dt \int_0^T n(t)\psi_h(t)dt\right] = \int_0^T \int_0^T E[n(t)n(\tau)]\psi_k(t)\psi_h(\tau)dtd\tau = \frac{N_0}{2} \delta_{hk}$$

- Le componenti r_n sono variabili aleatorie **gaussiane, indipendenti, a valor medio s_{mn}** , e con **varianza $N_0/2$**

$$f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^N (r_n - s_{mn})^2\right)$$

Demodulatore (coerente) a filtro adattato

- **Massimizza il rapporto segnale rumore (SNR).**
- Dimostrazione: sia $r(t)=s_m(t)+n(t)$ il segnale ricevuto e $h(t)$ la risposta impulsiva del filtro. Dopo filtraggio e campionamento otteniamo:

$$y(T) = \int_0^T s_m(\tau)h(T - \tau)d\tau + \int_0^T n(\tau)h(T - \tau)d\tau = y_s(T) + y_n(T)$$

e dobbiamo rendere massimo $\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{y_s^2(T)}{E[y_n^2(T)]} = \frac{\left[\int_0^T h(\tau)s_m(T - \tau)d\tau\right]^2}{\frac{N_0}{2} \int_0^T h^2(T - t)dt}$

essendo $E[y_n^2(T)] = \iint E[n(t)n(\tau)]h(T - t)h(T - \tau)dt d\tau = \frac{N_0}{2} \int h^2(T - t)dt$

Il numeratore è massimo (**Cauchy-Schwartz**) se $h(t) = Cs_m(T - t)$ dove C è una costante, e il rapporto S/N massimo vale: $(S/N)_{\max} = 2E_s/N_0$ (dipende dall'energia ma non dalla forma d'onda).

- $y(t) = r(t) * s_m(T - t), y(T) = \int_0^T r(\tau)s_m(\tau)d\tau$: **correlazione**.



Probabilità di corretta decisione

- Lo spazio vettoriale N -dimensionale cui appartiene \mathbf{r} , viene suddiviso in M regioni, a 2 a 2 disgiunte, A_m (regioni di decisione o di Voronoi).

- Probabilità di corretta decisione:

$$p_c = \sum_m p(\mathbf{r} \in A_m | \mathbf{s}_m) p(\mathbf{s}_m) = \sum_m p(\mathbf{s}_m) \int_{\mathbf{r} \in A_m} f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) d\mathbf{r}$$

- Criterio MAP: $\mathbf{r} \in A_m : m = \arg \max_j (f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_j) p(\mathbf{s}_j))$

- Scelta binaria $r \in A_0 : f(r | s_0) p(s_0) > f(r | s_1) p(s_1)$, equivalente a:
(il rapporto tra le probabilità condizionate è detto **rapporto di verosimiglianza**).

$$r \in A_0 : \frac{f(r | s_0)}{f(r | s_1)} > \frac{p(s_1)}{p(s_0)}$$

- Se $p(s_0) = p(s_1)$, oppure se le due probabilità non sono note si adotta il criterio ML:

$$r \in A_0 : \frac{f(r | s_0)}{f(r | s_1)} > 1$$



Esempio: modulazione binaria antipodale

- $M=2$, due forme d'onda (modulazione binaria), $s_0=-g(t)$, $s_1=g(t)$.
- $N=1$ (dimensione della base): $\psi(t) = g(t)/\sqrt{E_g}$ dove $E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt$
- E_g è l'energia della forma d'onda (impulso). In questo caso essa coincide con l'energia media per simbolo, E_{av} spesso nel seguito indicata con E_s .
- Energia media per bit di informazione: $E_b = E_s/R = E_s/(R_c \log_2 M) = E_s/R_c$.
(R è detto tasso di informazione e si misura in bit di informazione per simbolo)
- Rappresentazione vettoriale: $\mathbf{s}_0 = \{-\sqrt{E_s}\}$, $\mathbf{s}_1 = \{\sqrt{E_s}\}$.

- Costellazione:

$$f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(r + \sqrt{E_s})^2}{N_0}\right) \quad f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(r - \sqrt{E_s})^2}{N_0}\right)$$



Probabilità d'errore

- MAP (in forma logaritmica) $r \in A_0 : \log \frac{f(r|s_0)}{f(r|s_1)} = \frac{4r\sqrt{E_s}}{N_0} > \log \frac{p(s_0)}{p(s_1)}$
- Soglia di decisione ottima: $r_t = \frac{N_0}{4\sqrt{E_s}} \log \frac{p(s_0)}{p(s_1)}$
- ML: $r_t = 0$ (ottima sse $p(s_0)=p(s_1)$). Poniamo $p_0=p(s_0)$, $p_1=p(s_1)=1-p_0$.
- Probabilità d'errore: $p_e = p(r \in A_1|s_0)p_0 + p(r \in A_0|s_1)p_1 = p_0 \int_{r_t}^{\infty} f(r|s_0)dr + p_1 \int_{-\infty}^{r_t} f(r|s_1)dr$
- $\int_{r_t}^{\infty} f(r|s_0)dr = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{r_t}^{\infty} e^{-\frac{(r+\sqrt{E_s})^2}{N_0}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{r_t+\sqrt{E_s}}{\sqrt{N_0/2}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = Q\left(\frac{d_{t_0}}{\sqrt{N_0/2}}\right)$ essendo $d_{t_0} = r_t - (-\sqrt{E_s})$

la distanza tra la soglia e il valore della forma d'onda trasmessa, e $Q(x)$, la complementare della funzione cumulativa di una normale.

- Si ha: $p_e = p_0 Q\left(\frac{d_{t_0}}{\sqrt{N_0/2}}\right) + p_1 Q\left(\frac{d_{t_1}}{\sqrt{N_0/2}}\right)$; se $r_t = 0$ si ottiene $d_{t_0} = d_{t_1} = \sqrt{E_s}$, $p_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$

Riepilogo

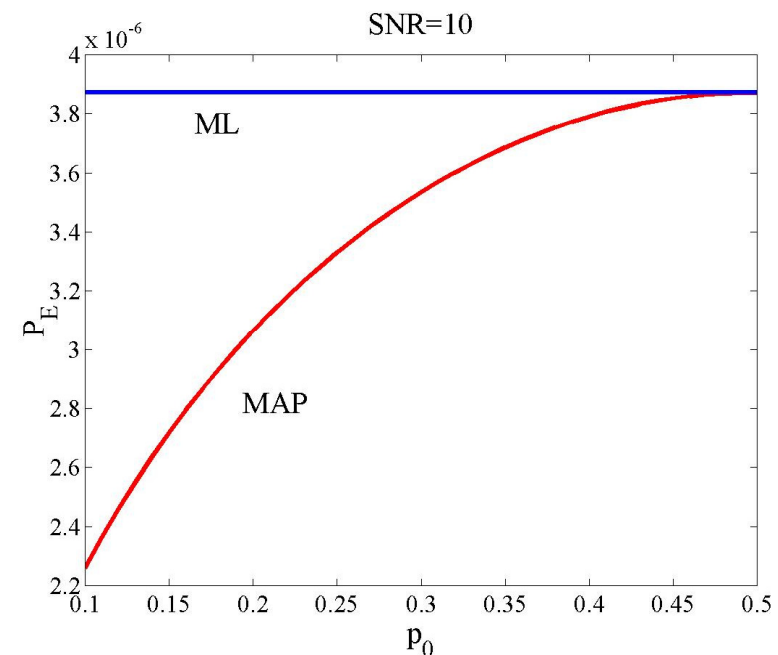
- Probabilità d'errore scelta binaria: $p_e = Q\left(\frac{d_t}{\sqrt{N_0/2}}\right)$,
essendo d_t la distanza tra la soglia che delimita le due regioni di Voronoi di simboli adiacenti, e il simbolo di cui si vuole determinare la probabilità d'errore. Se la soglia è al centro, detta $d=2d_t$ la distanza fra le forme d'onda, si ha $p_e = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)$

- Probabilità d'errore modulazione binaria antipodale (MAP):

$$p_e = p_0 Q\left(\frac{d_{t_0}}{\sqrt{N_0/2}}\right) + p_1 Q\left(\frac{d_{t_1}}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Ponendo la soglia al centro ($r_t=0$, ML) si ha (soglia ottima sse $p_0=p_1=1/2$):

$$p_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$





Modulazioni numeriche

- Modulazioni in banda base:
 - MODULAZIONE D'AMPIEZZA (PAM: *Pulse Amplitude Modulation*).
 - Modulazione di posizione (PPM: *Pulse Position Modulation*).
- Modulazioni in banda traslata:
 - MODULAZIONE D'AMPIEZZA (ASK: *Amplitude Shift Keying*).
 - MODULAZIONE DI FASE (PSK: *Phase Shift Keying*).
 - MODULAZIONE DI AMPIEZZA E FASE (QAM: *Quadrature Amplitude Modulation*).
 - Modulazione di frequenza (FSK: *Frequency Shift Keying*)



Modulazioni lineari in banda traslata

- **Modulazioni di ampiezza:** $N=1$. $\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t)$

Involuppo complesso: $\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT)$, $a_n \in \{2m-1-M\}, m=1, \dots, M=2^b$

- **Modulazioni di fase, di ampiezza e fase:** $N=2$.

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t) \quad \psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Involuppo complesso: $\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j\theta_n} g(t - nT)$,

Modulazioni di fase ($M \geq 4$): $\alpha_n = \alpha = \text{costante}$, $\theta_n \in \left\{ \frac{2\pi}{M} m + \frac{\pi}{M} \right\}, m=0, \dots, M-1$

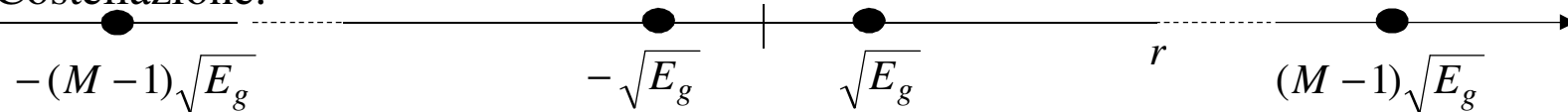
Modulazioni QAM ($M=2^{2b}$): $a_n = \alpha_n \cos(\vartheta_n) \in \{2m-1-\sqrt{M}\}, m=1, \dots, \sqrt{M}=2^b$

$$b_n = \alpha_n \sin(\vartheta_n) \in \{2m-1-\sqrt{M}\}, m=1, \dots, \sqrt{M}=2^b$$

Modulazione di ampiezza (PAM-ASK)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) \quad a_n \in \{2m-1-M\}, m=1, \dots, M=2^b$$

Costellazione:



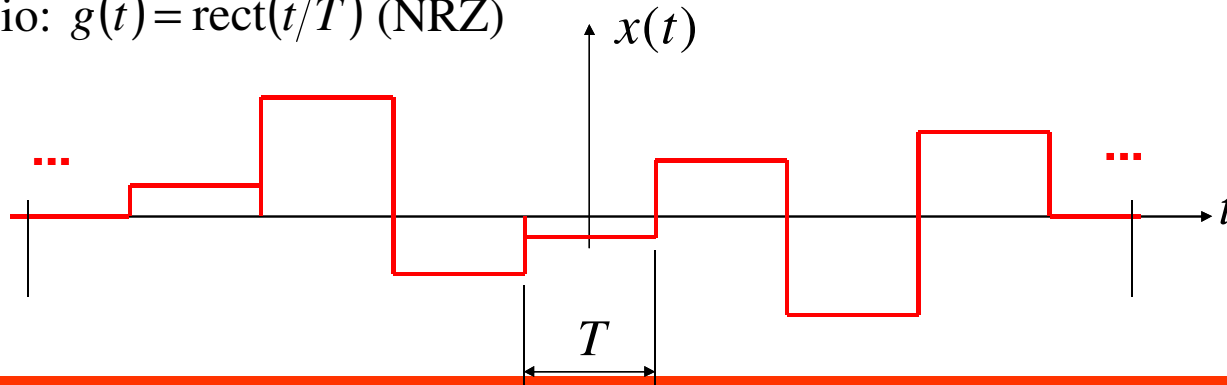
Energia per forma d'onda: $E_m = a_m^2 E_g$

Energia media per simbolo: $E_s = E_{av} = R_c E_b \log_2 M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E_m = E_g (M^2 - 1)/3$

Probabilità d'errore di simbolo: essendo $d = 2\sqrt{E_g}$

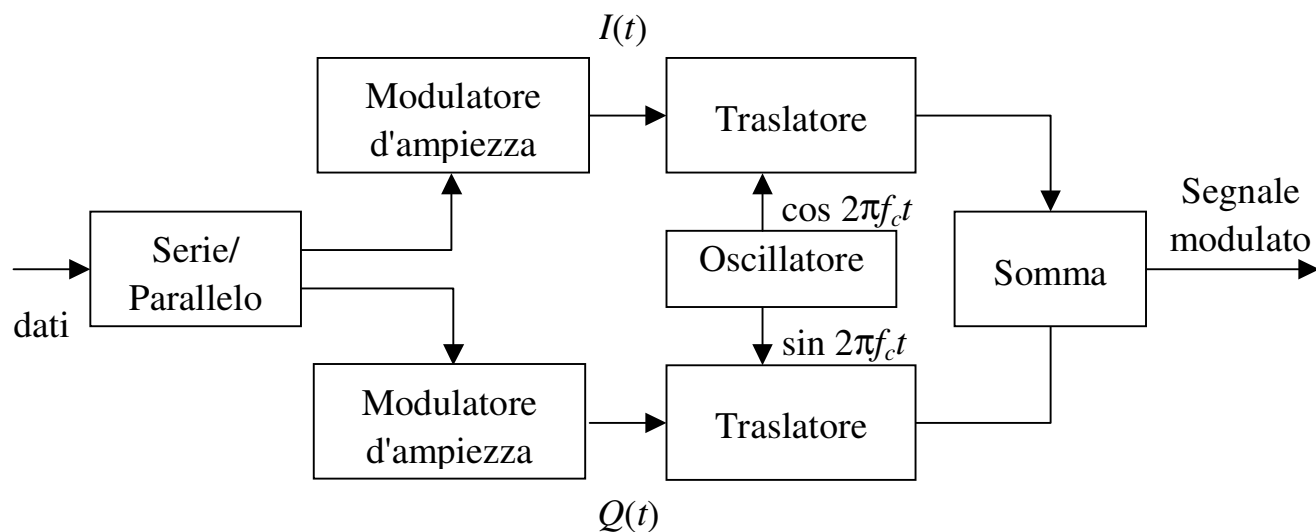
$$P_E = \sum_{m=1}^M P_m P_{E|m} = \frac{1}{M} \left[(M-2) 2Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) + 2Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) \right] \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1}} R_c \frac{E_b}{N_0}\right)$$

Esempio: $g(t) = \text{rect}(t/T)$ (NRZ)



Modulazioni di ampiezza e fase in banda traslata

- Modulatore QAM



- Modulazione QAM: la componente in fase, $I(t)$, e la componente in quadratura, $Q(t)$, sono segnali modulati in ampiezza.
- f_c è detta frequenza della portante.
- Inviluppo complesso: $v(t) = I(t) + jQ(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT)$

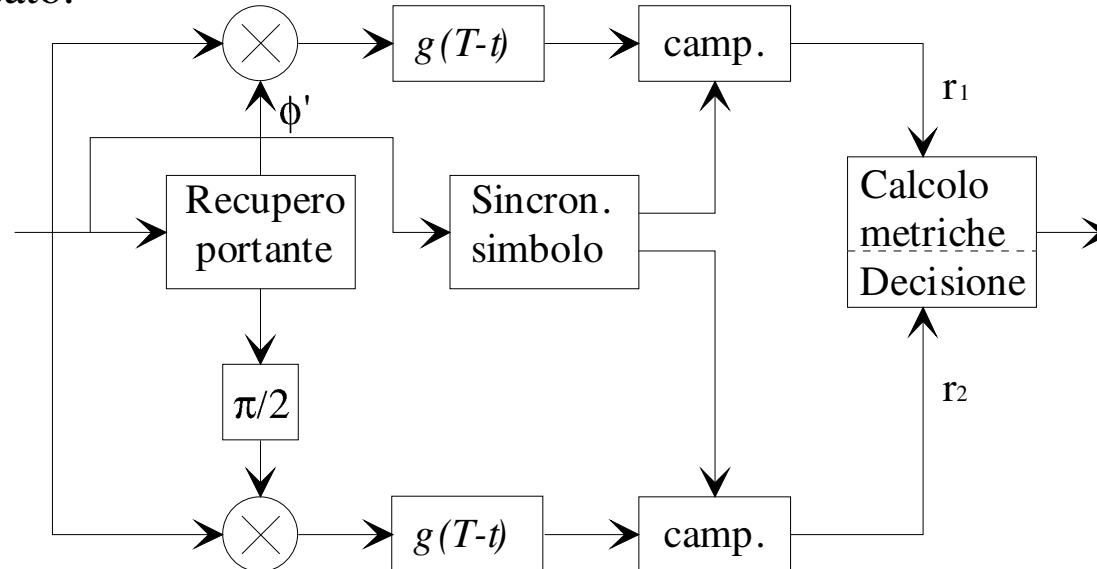
Modulazioni di ampiezza e fase in banda traslata

- **Demodulatore coerente** a filtro adattato

Il canale introduce ritardo, t_d . Trascurando gli effetti della distorsione introdotta dal canale e del rumore introdotto dal ricevitore si ha

$$x_R(t) = x_T(t - t_d) = \text{Re} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j\theta_n} g(t - t_d - nT) e^{j2\pi f_c(t - t_d)} \right\},$$

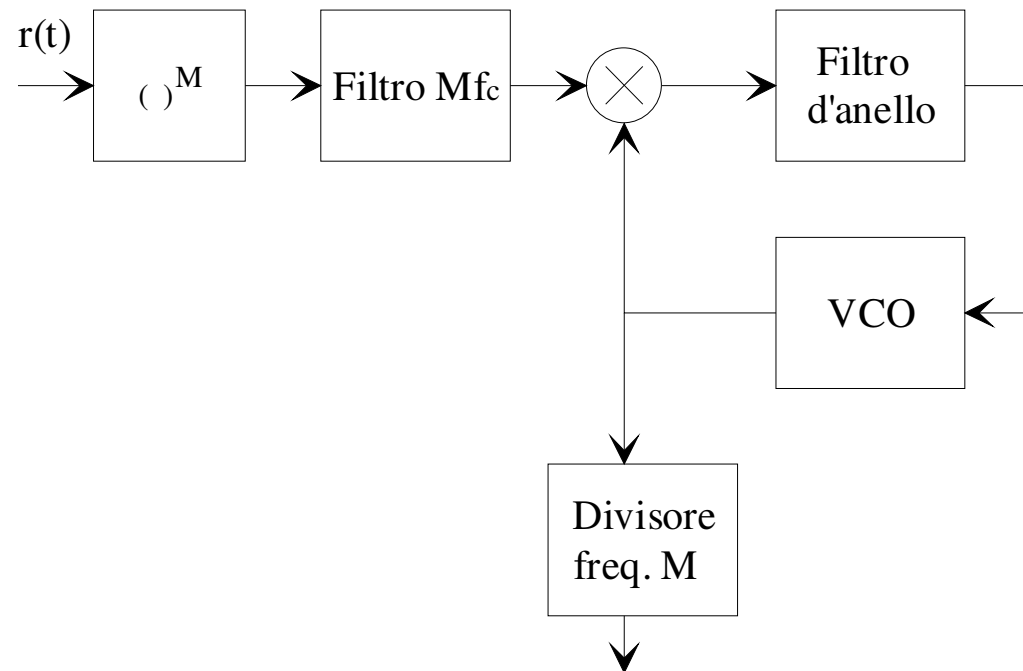
pertanto il ritardo introduce uno sfasamento $\phi = 2\pi f_c t_d$ che deve essere compensato.





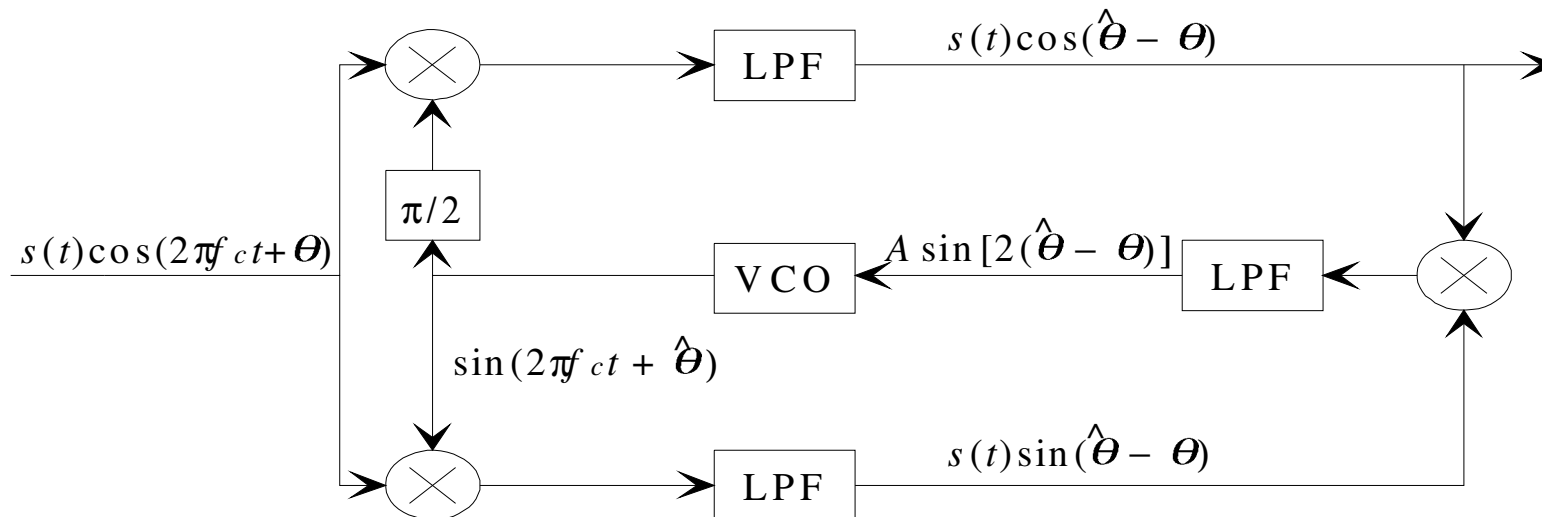
Recupero della fase (1)

- Recupero della portante



Recupero della fase (2)

- Loop di Costas

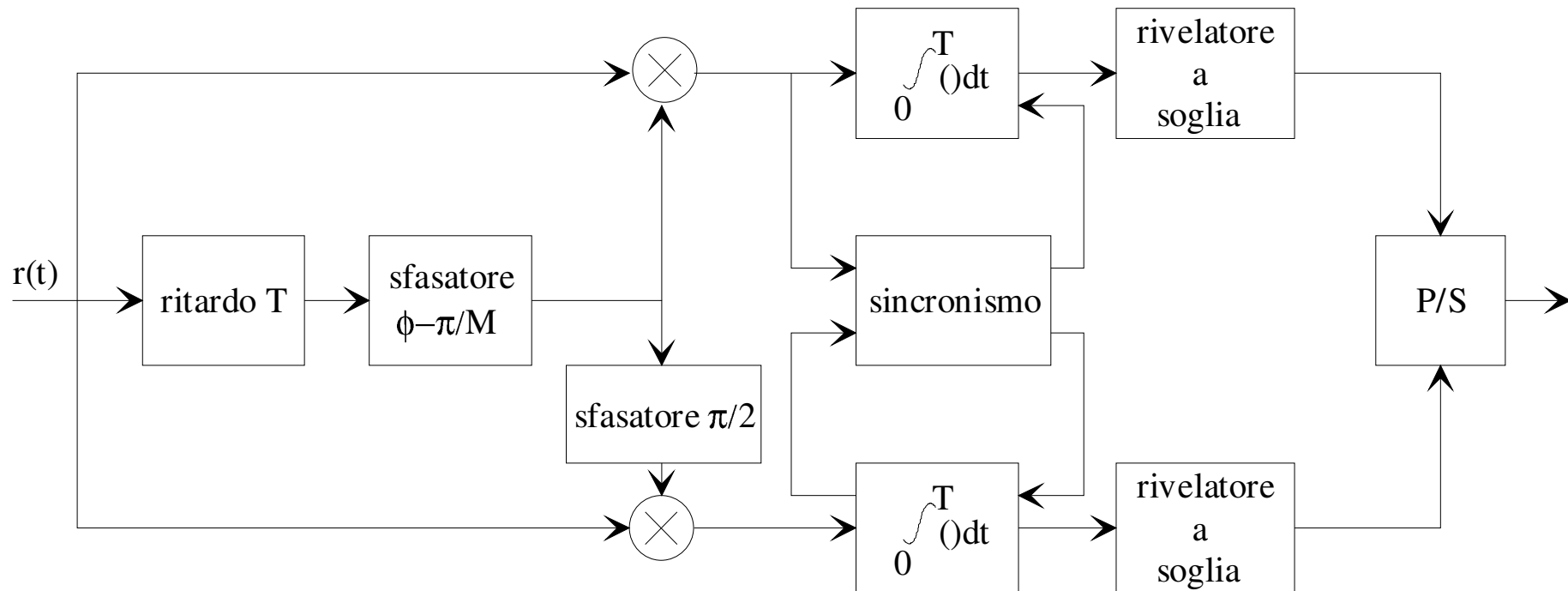


- Esempio di recupero fase per segnale binario antipodale

Vi è un problema di ambiguità di fase di π .

Demodulazione differenziale (DCPSK)

- Non richiede il recupero della portante, mentre la codifica differenziale elimina le ambiguità di fase. Nel diagramma è riportato lo schema 4-DCPSK.



- Per $M > 2$ la probabilità di errore è data dalla: $p_{E_{M-DPSK}} \approx 2Q\left(\sqrt{R_c \log_2 M \frac{E_b}{N_0} \sin \frac{\pi}{M}}\right)$.
- Per $M=2$ abbiamo $p_{E_{2-DPSK}} = \exp(-R_c E_b / N_0) / 2$.



DPSK – Precodifica differenziale

- BPSK (2-ASK); siano b_k i bit di informazione, d_k i valori trasmessi e \hat{d}_k quelli ricevuti.

– Codifica: $d_k = \overline{b_k \oplus d_{k-1}}$; Decodifica: $\hat{b}_k = \overline{\hat{d}_k \oplus \hat{d}_{k-1}}$.

b_k		0	1	1	1	0	1	0	1
d_k	1	0	0	0	0	1	1	0	0
φ_k	π	0	0	0	0	π	π	0	0
\hat{d}_k	1	0	0	0	0	1	1	0	0
\hat{b}_k		0	1	1	1	0	1	0	1
\hat{d}_k	0	1	1	1	1	0	0	1	1
\hat{b}_k		0	1	1	1	0	1	0	1

Fasi
invertite

- QPSK $I_k = \overline{(A_k \oplus B_k)}(A_k \oplus I_{k-1}) + (A_k \oplus B_k)(B_k \oplus Q_{k-1})$,

– Codifica: $Q_k = \overline{(A_k \oplus B_k)}(B_k \oplus Q_{k-1}) + (A_k \oplus B_k)(A_k \oplus I_{k-1})$.

$$\hat{A}_k = \overline{(\hat{I}_k \oplus \hat{Q}_k)}(\hat{I}_k \oplus \hat{I}_{k-1}) + (\hat{I}_k \oplus \hat{Q}_k)(\hat{Q}_k \oplus \hat{Q}_{k-1}),$$

– Decodifica: $\hat{B}_k = \overline{(\hat{I}_k \oplus \hat{Q}_k)}(\hat{Q}_k \oplus \hat{Q}_{k-1}) + (\hat{I}_k \oplus \hat{Q}_k)(\hat{I}_k \oplus \hat{I}_{k-1})$.



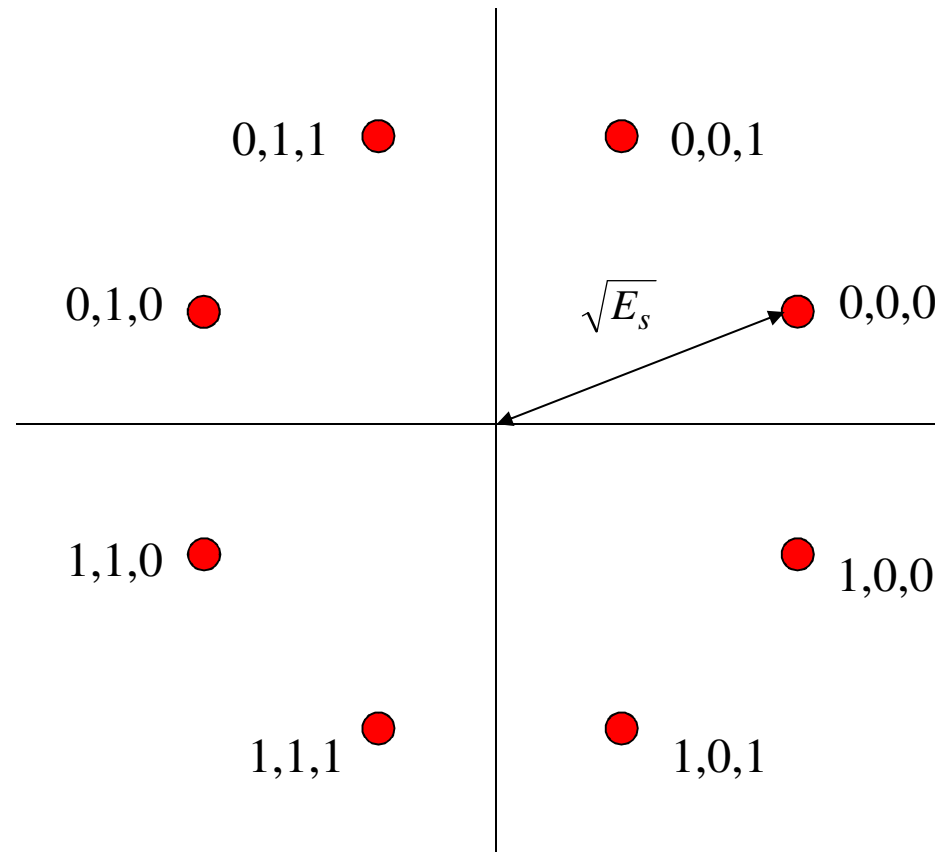
Gray mapping

Bit					Ordine						Ordine
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	16
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	17
0	0	0	1	1	2	1	1	0	1	1	18
0	0	0	1	0	3	1	1	0	1	0	19
0	0	1	1	0	4	1	1	1	1	0	20
0	0	1	1	1	5	1	1	1	1	1	21
0	0	1	0	1	6	1	1	1	0	1	22
0	0	1	0	0	7	1	1	1	0	0	23
0	1	1	0	0	8	1	0	1	0	0	24
0	1	1	0	1	9	1	0	1	0	1	25
0	1	1	1	1	10	1	0	1	1	1	26
0	1	1	1	0	11	1	0	1	1	0	27
0	1	0	1	0	12	1	0	0	1	0	28
0	1	0	1	1	13	1	0	0	1	1	29
0	1	0	0	1	14	1	0	0	0	1	30
0	1	0	0	0	15	1	0	0	0	0	31



Phase Shift Keying (M-PSK)

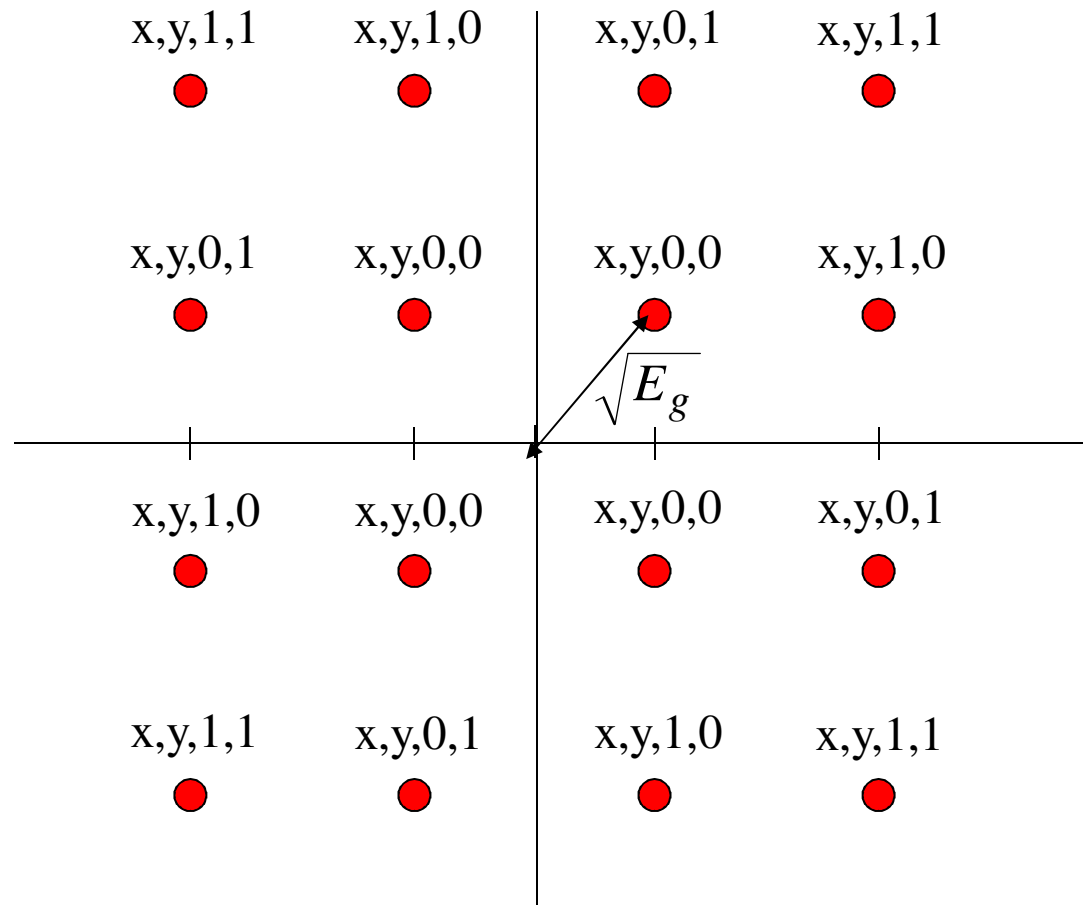
- Costellazione (esempio: 8-PSK, con Gray *mapping*)





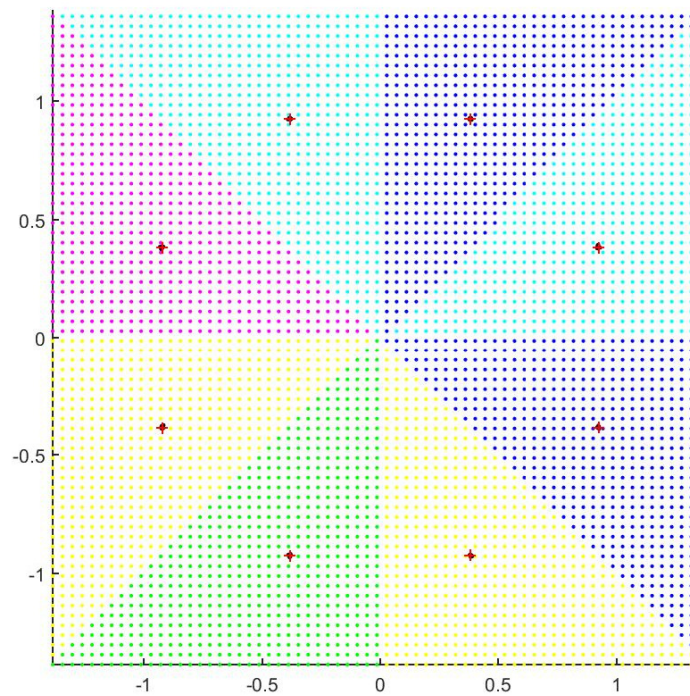
Quadrature Amplitude Modulation (M-QAM)

- Costellazione (esempio: 16-QAM); *mapping* invariante alla rotazione (x,y vengono codificati in modo differenziale).

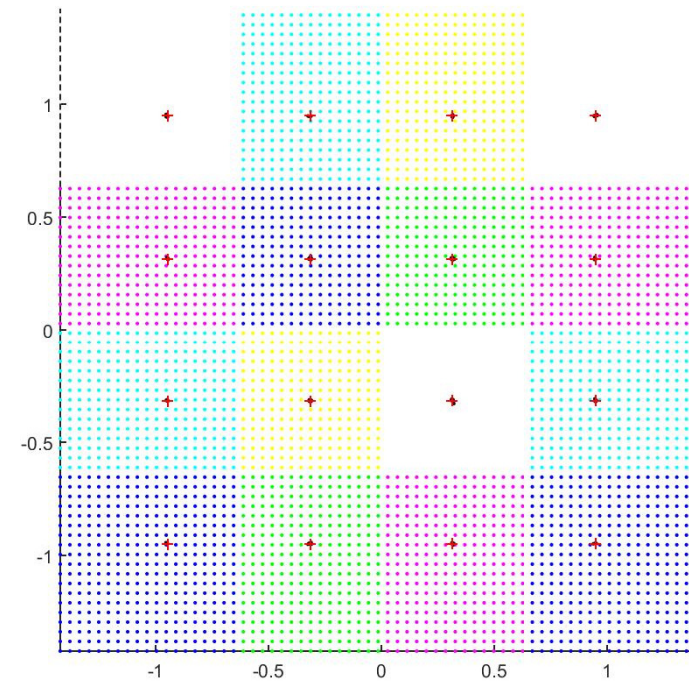


Regioni di decisione a minima distanza

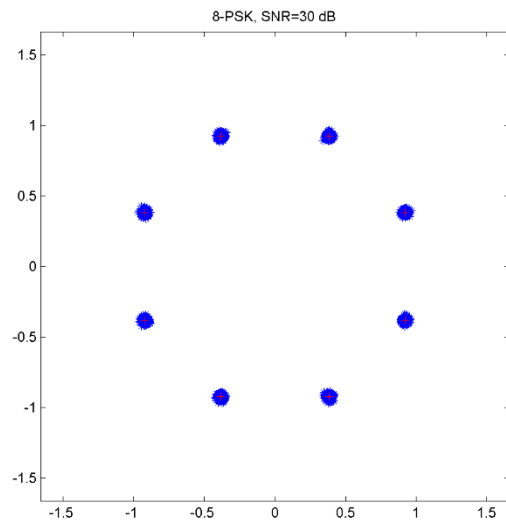
- 8-PSK



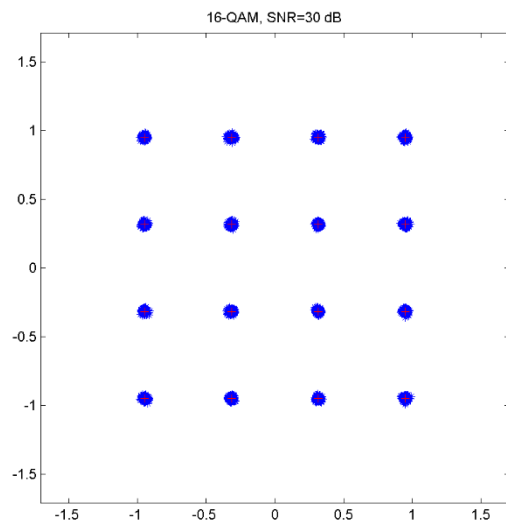
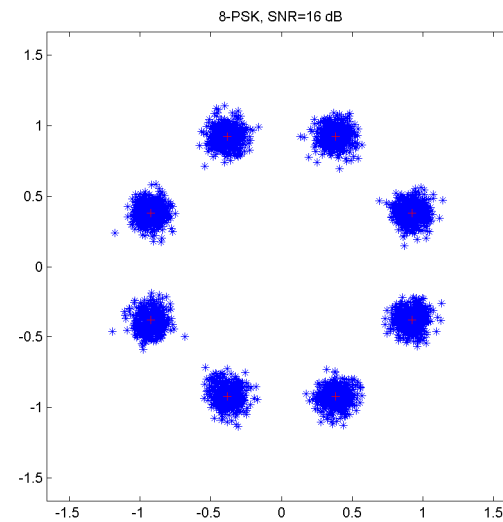
- 16 QAM



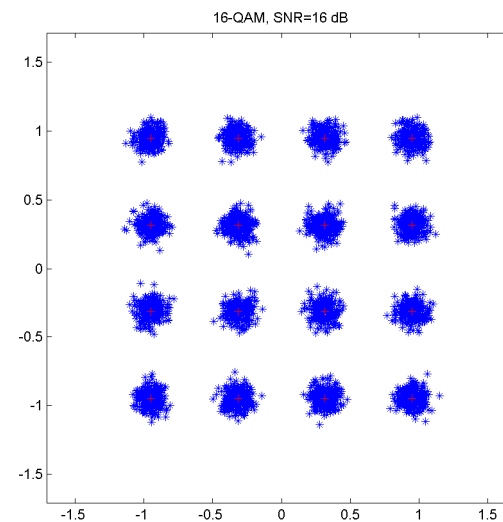
Esempi (diagrammi di scattering, costellazioni)



• 8 PSK



• 16 QAM



Probabilità d'errore modulazioni bidimensionali



- M-QAM

Abbiamo 2 segnali ASK in quadratura, ciascuno con $\sqrt{M} = 2^{b-1}$ valori diversi.

Probabilità di corretta decodifica: $p_{CM-QAM} = \left[1 - p_{E_{\sqrt{M}-ASK}} \right]^2$

Probabilità d'errore di simbolo:

$$p_{EM-QAM} = 1 - p_{CM-QAM} \approx 2p_{E_{\sqrt{M}-ASK}} < 4Q\left(\sqrt{\frac{3R_c \log_2 M}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- M-PSK

$$d = 2\sqrt{E_s} \sin(\pi/M),$$

$$P_{EM-PSK} \approx 2Q\left(\sqrt{2R_c \log_2 M \cdot E_b/N_0} \sin(\pi/M)\right)$$



Confronto QAM-PSK

- È sufficiente confrontare gli argomenti: consideriamo il

quadrato del loro rapporto:
$$R_M = \frac{3/(M-1)}{2\sin^2 \pi/M},$$

che rappresenta la perdita, in energia media, della PSK sulla QAM. Alcuni valori sono riassunti in tabella. Si noti il grande vantaggio della QAM per elevati valori di M .

M	R_M (dB)
4	0
8	1.65
16	4.2
32	7.02
64	9.95
128	12.92
256	15.91

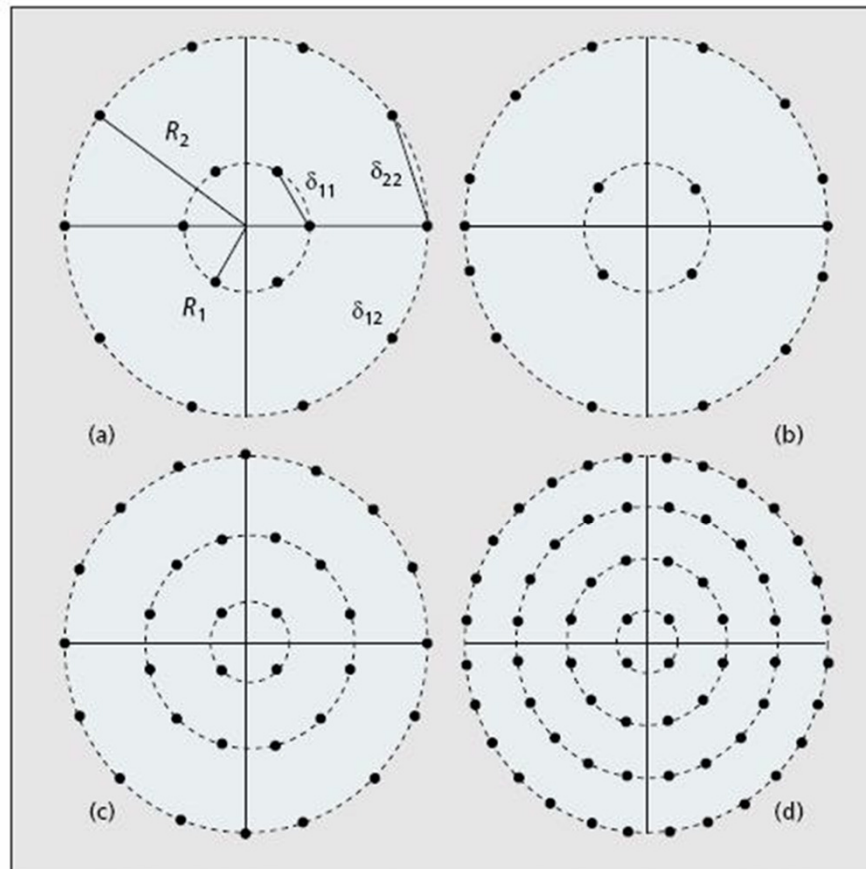
- Esaminiamo l'incremento di energia media per bit richiesto dalla M-QAM rispetto alla modulazione antipodale. Il quadrato del rapporto fra gli argomenti delle funzioni

d'errore è $\frac{2(M-1)}{3\log_2 M}$, di cui alcuni valori sono in tabella.

La banda viene sfruttata meglio, ma si deve usare molta più energia per bit.

M	(dB)
4	0
8	1.91
16	3.98
32	5.16
64	8.45
128	10.82
256	13.27

M-APSK



■ **Figure 1.** Multi-ring APSK constellations: a) Euclidean distances; b) 16-point 4-12-APSK; c) 32-point 4-12-16-APSK; d) 64-point 4-12-20-28-APSK.

- S. Benedetto et al., "MHOMS: high-speed ACM modem for satellite applications ", IEEE Wireless Communications, pp. 66-77, Vol. 12, N.2, April 2005.

4-12 APSK

$$d_{\min} = \delta_{11} = \delta_{22} = R_1 \sqrt{2}$$

$$R_2 = R_1 / (\sqrt{2} \sin(\pi/12))$$

$$E_s = KR_1^2$$

$$K = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{2 \sin^2(\pi/12)} \right) \approx 5.85$$

$$P_E \approx 2Q \left(\sqrt{\frac{4R_c}{K} \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Confronto con 16-QAM

2 livelli energetici invece di 3
0.68 dB di energia media in più

Spettro di potenza di un segnale numerico

- **Modulazione lineare**

Inviluppo complesso: $v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT)$, dove i coefficienti complessi a_n (informazione) sono variabili aleatorie appartenenti a un processo stazionario, caratterizzato dal valor medio $\mu_a = E[a_n]$ e dalla funzione di autocorrelazione

$$R_a(m - n) = E[a_n^* a_m]$$

- **Funzione di autocorrelazione** dell'inviluppo complesso (processo ciclostazionario di periodo T):

$$R_v(t, t + \tau) = E \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^* g(t - nT) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m g(t - mT + \tau) \right] = \sum_n \sum_m R_a(m - n) g(t - nT) g(t - mT + \tau)$$

- Teorema di **Wiener-Khintchine**.: lo spettro di potenza di un processo ciclostazionario è dato da: $S_v(f) = F\{\overline{R_v(\tau)}\}$, dove F rappresenta la trasformata di Fourier, e

$$\overline{R_v(\tau)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_v(t, t + \tau) dt = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) R_g(\tau - mT) \quad \text{essendo } R_g(t) = g(t) \otimes g(-t)$$

- **Spettro di potenza:** $S_v(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} S_a(f)$

dove è lo "spettro" dei dati, $S_a(f)$, è dato da $S_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) \exp(-j2\pi f m T)$.

Casi particolari

- Un'uguaglianza utile: $\int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \delta(t - nT) e^{-j2\pi ft} dt = \sum_n e^{-j2\pi fnT} = \frac{1}{T} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$

- Caso generale:

$$S_v(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \left(\sigma_a^2 + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(R_a(m) - |\mu_a|^2 \right) e^{-j2\pi fmT} \right] \right) + \frac{|\mu_a|^2}{T^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| G\left(\frac{m}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

- Dati indipendenti, a valor medio non nullo:

$$R_a(m) = \begin{cases} |\mu_a|^2 + \sigma_a^2 & m = 0 \\ |\mu_a|^2 & m \neq 0 \end{cases}$$

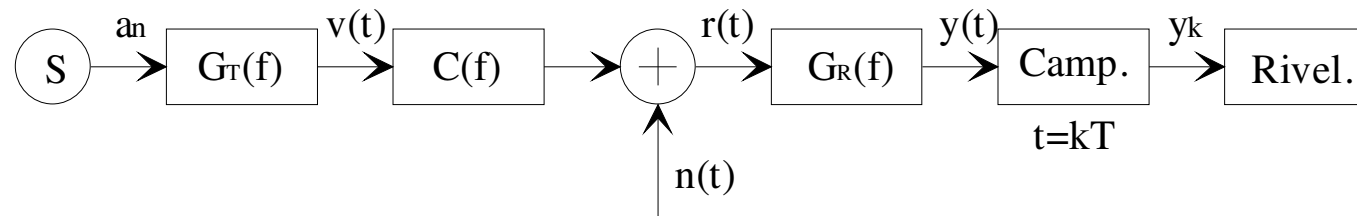
$$S_v(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \sigma_a^2 + \frac{|\mu_a|^2}{T^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| G\left(\frac{m}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

- Dati indipendenti, a valor medio nullo

$$R_a(m) = \begin{cases} \sigma_a^2 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases} \quad \text{dove } \sigma_a^2 = E[|a_m|^2] - |\mu_a|^2 \text{ è la varianza dei dati.}$$

$$S_v(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \sigma_a^2$$

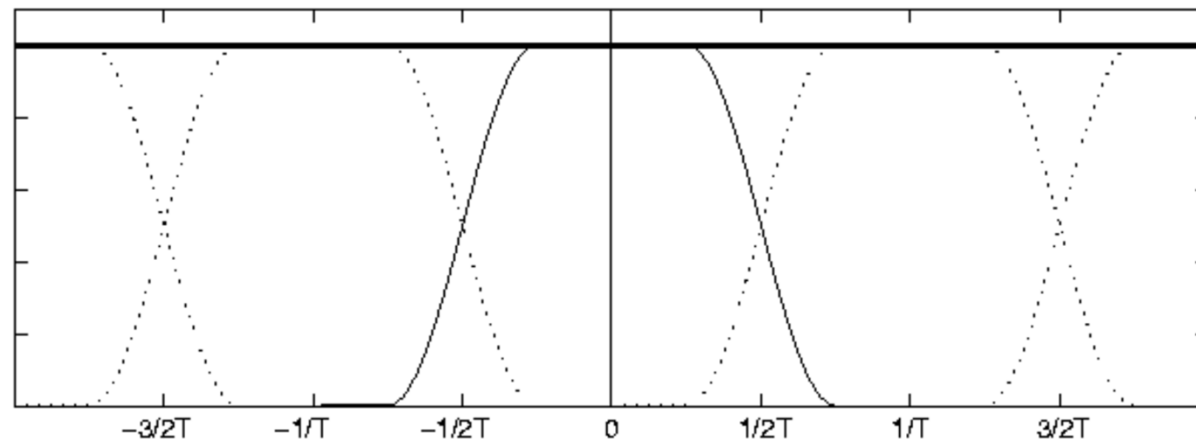
Canali lineari a banda limitata



- La durata non è limitabile, e ciò pone un limite a $1/T$. A causa di questo non mi posso a limitare a considerare la singola forma d'onda, ma devo considerare l'intero messaggio, che è un segnale di potenza.
- Detto $H(f) = G_T(f)C(f)G_R(f)$ il segnale in uscita è espresso dalla relazione: $y(t) = \sum_n \alpha_n h(t - nT) + v(t)$, dove $v(t)$ è il rumore all'uscita del filtro di ricezione.
- Le funzioni di trasferimento del filtro di trasmissione, $G_T(f)$, e del filtro di ricezione, $G_R(f)$, devono essere scelte in modo che la funzione di trasferimento complessiva, $H(f)$, sia quella voluta. Qualora il canale non sia ideale, la sua funzione di trasferimento viene compensata (equalizzata) da $G_T(f)$ e $G_R(f)$, secondo la relazione scritta.
- Vi sono vari modi di ripartire l'equalizzazione fra trasmettitore e ricevitore, ma tutti comportano un peggioramento delle prestazioni.

Progetto di segnali per canali a banda limitata

- Funzione di trasferimento complessiva: $H(f) = G_T(f)C(f)G_R(f)$
- Segnale ricevuto campionato: $y_k = a_k h_0 + \sum_{n \neq k, n=-\infty}^{\infty} a_n h_{n-k} + v_k$
- Non vi è interferenza intersimbolica (ISI) se: $h_k = h(kT) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$
- Sia $\Delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ la funzione di campionamento, non abbiamo ISI se:
 $x(t)\Delta_T(t) = \delta(t)$, condizione nel dominio del tempo, che equivale alla:
 $X_{eq}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k/T) = T = \text{costante}$ (condizione nel dominio della
 frequenza).



Teorema di Nyquist

- $H_{eq}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\left(f - \frac{k}{T}\right) = T = \text{costante}$.
- Banda minima necessaria per non aver interferenza intersimbolica: $W_{\min} = 1/2T = f_N$ (dove f_N è detta frequenza di Nyquist).
La banda minima può essere ottenuta ponendo: $H(f) = \text{rect}(fT) = \Pi(fT)$.

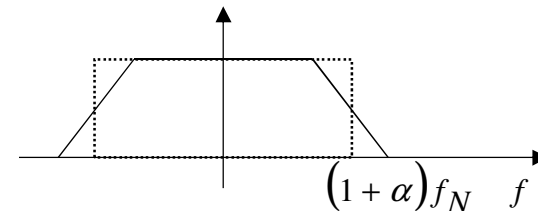
Tale funzione è difficile da realizzare e, in caso di imperfetto sincronismo, può portare a un'interferenza intersimbolica illimitata.

Detto $h_k = h(kT + \Delta t)$, con $\Delta t > 0$, risulta $\sum_{n \neq k, n=-\infty}^{\infty} |h_{n-k}| = \infty$

- Per rispettare la condizione (*), e limitare gli effetti di un sincronismo imperfetto, al posto della funzione $\text{rect}()$, si utilizza una funzione che adotti una banda leggermente maggiore, modificando in modo antisimmetrico la transizione intorno alla frequenza $f_N = 1/(2T)$.

$$f_N < W = (1 + \alpha)f_N \leq 2f_N, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

- α dicesi fattore di “roll-off”.

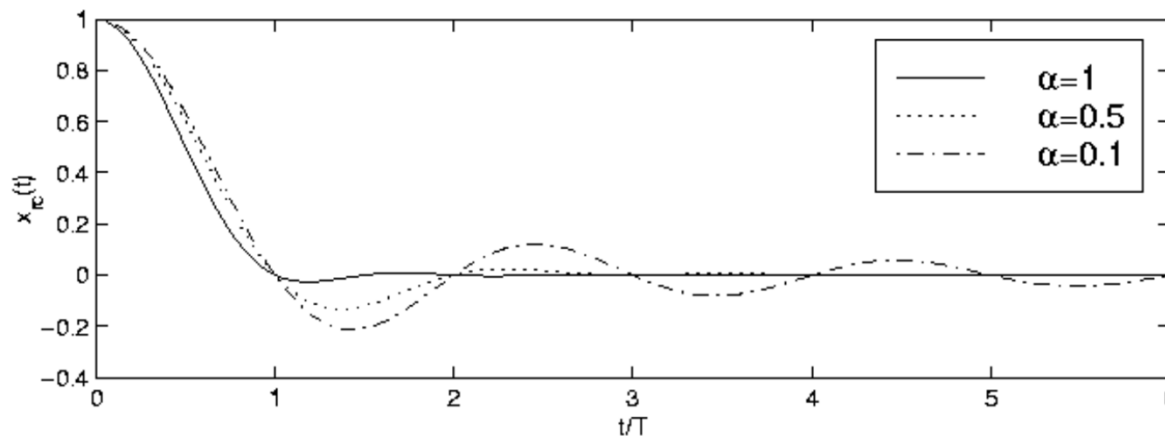


Funzioni a coseno rialzato

- La transizione più comunemente adottata è quella di tipo sinusoidale (‘coseno rialzato’ o ‘*Raised Cosine*’).

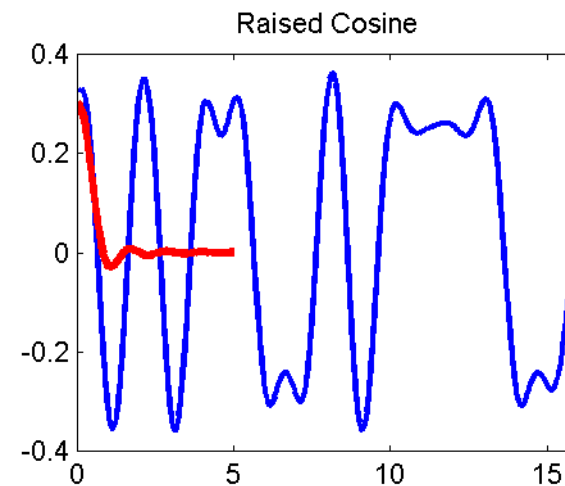
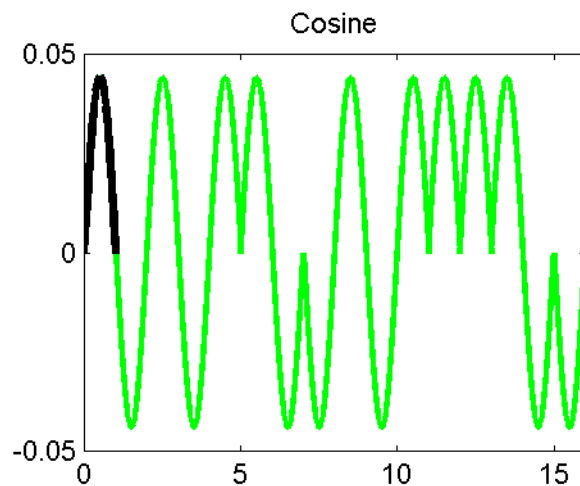
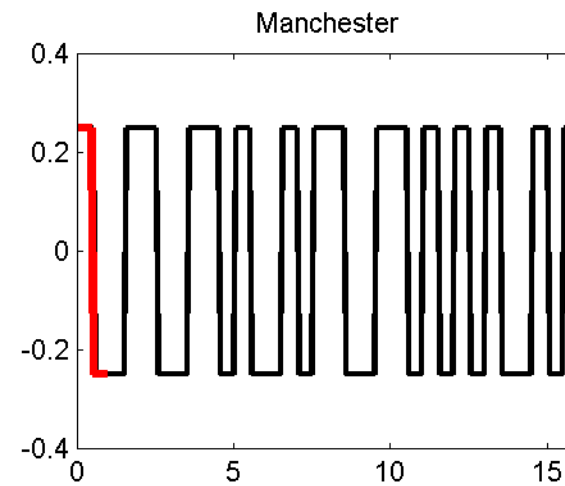
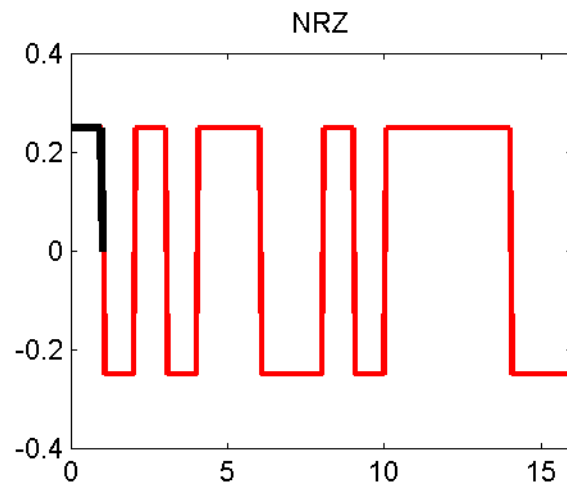
$$H_{RC}(f) = \begin{cases} T & |f| \leq (1-\alpha)/2T \\ \frac{T}{2} \left(1 + \cos \left(\pi \frac{T}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T} \right) \right) \right) & (1-\alpha)/2T \leq |f| \leq (1+\alpha)/2T \\ 0 & |f| \geq (1+\alpha)/2T \end{cases}$$

- All’aumentare di α aumenta la banda,, ma aumenta anche la rapidità con cui si smorza la risposta impulsiva (e quindi diminuiscono i problemi derivanti da sincronismo imperfetto). Comunemente si adotta $0.5 \leq \alpha \leq 1$.

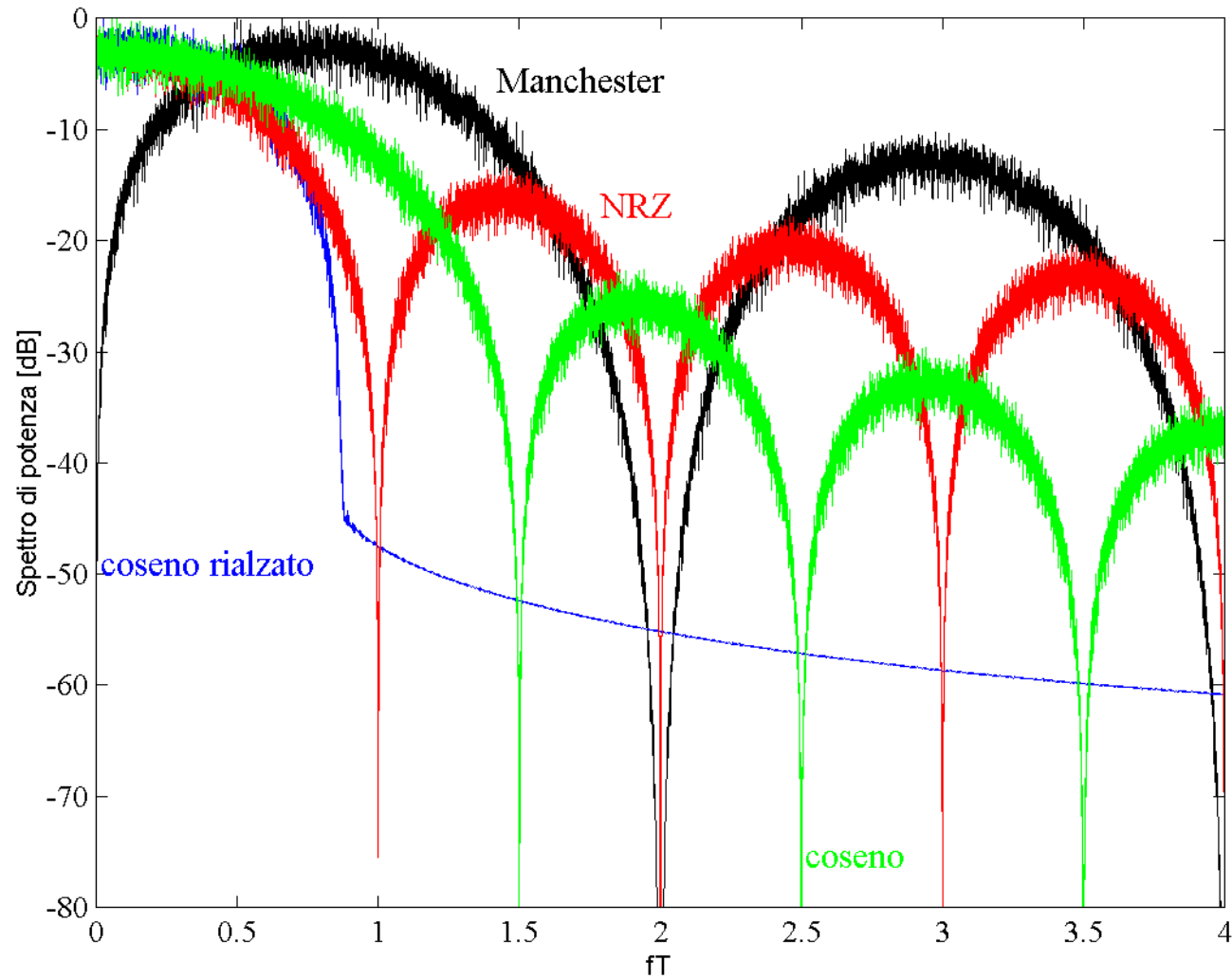


$$h_{RC}(t) = \frac{\sin(\pi t/T) \cos(\alpha \pi t/T)}{\pi t/T \cdot 1 - (2\pi t/T)^2}$$

Scelta dell'impulso



Spettro di potenza





Progetto del filtro di trasmissione e ricezione

- Condizione zero ISI: $G_T(f)C(f)G_R(f) = H_{RC}(f)e^{-j2\pi ft_0}$, $f \leq |W|$
- Il filtro adattato: rende massimo il rapporto segnale/rumore

$$G_R(f) = \frac{[G_T(f)C(f)]^* e^{-j2\pi fT}}{\Phi_n(f)}$$

Si ottiene

$$|G_T(f)| = \frac{|H(f)|^{1/2} \Phi_n^{1/2}(f)}{|C(f)|}, \text{ equalizzazione e enfasi in trasmissione;}$$

$$|G_R(f)| = \frac{|H(f)|^{1/2}}{\Phi_n^{1/2}(f)}, \text{ de-enfasi in ricezione.}$$

- Se il canale è ideale (nella banda di interesse) (in tal caso si parla di segnalazione a banda stretta) e il rumore è bianco:

$$|G_T(f)| = |G_R(f)| = |H(f)|^{1/2}$$

Frequency Shift Keying (M-FSK)

- Nelle modulazioni M-PSK e M-QAM l'energia richiesta aumenta con M , mentre la banda non cambia. Nella modulazione M-FSK succede l'opposto.

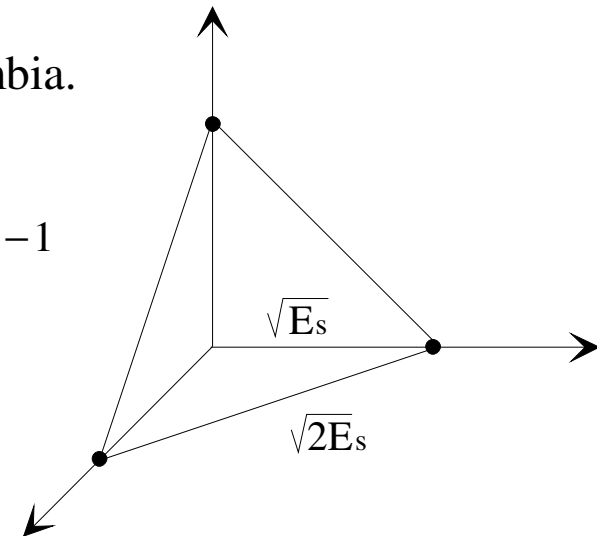
$$s_m(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad m = 0 \div M - 1$$

Il valore di Δf si sceglie imponendo la condizione di ortogonalità:

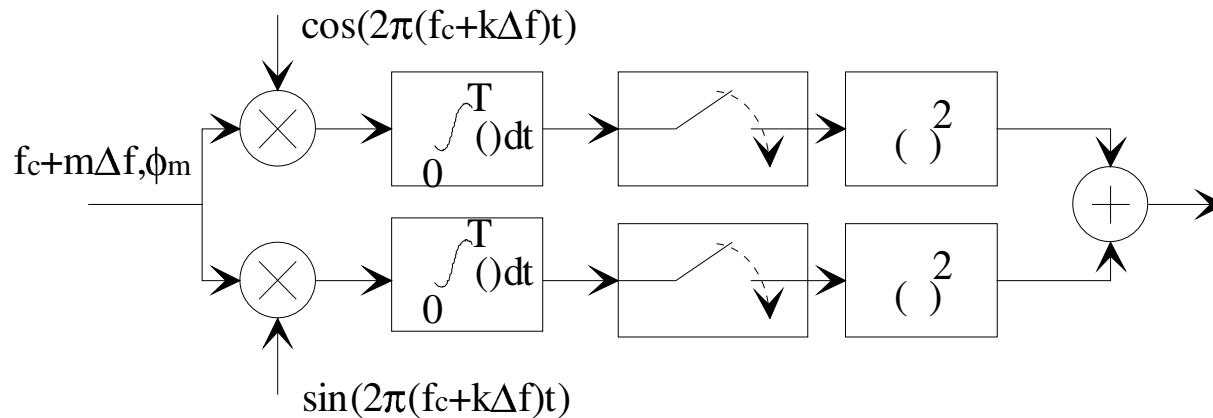
$$\langle u_m, u_n \rangle = E_s \frac{\sin[2\pi(m-n)\Delta f T]}{2\pi(m-n)\Delta f T} = E_s \delta_{mn}$$

Ciò si verifica se: $2\pi(m-n)\Delta f T = k\pi \rightarrow \Delta f = h/2T \rightarrow \Delta f_{\min} = 1/2T$

- $\psi_m(t) = \sqrt{2/T} \cos(2\pi(f_c + m\Delta f)t)$ $\mathbf{s}_1 = (\sqrt{E_s}, 0, \dots, 0)$
è uno spazio a M dimensioni, in cui tutte le coppie di segnali distano: $\sqrt{2E_s}$
- La probabilità d'errore è quella della M-PPM. All'aumentare di M cala l'energia richiesta ma aumenta la banda, che è circa pari a $M/2T$.
- Il ricevitore a correlazione ha M rami, ciascuno con recupero della portante.



M-FSK demodulatore a involuppo



- Uscite dei correlatori:
$$r_{kc} = \sqrt{E_s} \left[\frac{\sin 2\pi(k-m)\Delta f T}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi_m - \frac{\cos 2\pi(k-m)\Delta f T - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi_m \right] + n_{kc}$$

$$r_{ks} = \sqrt{E_s} \left[\frac{\cos 2\pi(k-m)\Delta f T - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi_m + \frac{\sin 2\pi(k-m)\Delta f T}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi_m \right] + n_{ks}$$

Affinché $r_{kc} = n_{kc}$, $r_{ks} = n_{ks}$, $\forall k \neq m$ deve essere:

$$\sin 2\pi(k-m)\Delta f T = \cos 2\pi(k-m)\Delta f T - 1 = 0.$$

La condizione di ortogonalità nel caso a involuppo diventa: $\Delta f = h/T$ $\Delta f_{\min} = 1/T$

- Il calcolo di $r_m^2 = r_{mc}^2 + r_{ms}^2$ rende ininfluyente l'effetto dello sfasamento ϕ_m .
Le prestazioni del caso binario sono 3 dB peggiori della DPSK.



Prestazioni: riepilogo

- Modulazione binaria antipodale: $P_e = Q\left(\sqrt{2R_c \frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{R_c \frac{E_b}{N_0}}\right)$

- M-ASK: $P_E = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6R_c \log_2 M}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$ $W_{\min} = f_N = \frac{1}{2T}$

- M-QAM: $P_{E_{M\text{-QAM}}} = 1 - P_{C_{M\text{-QAM}}} \approx 2P_{E_{\sqrt{M}\text{-ASK}}} < 4Q\left(\sqrt{\frac{3R_c \log_2 M}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$

- M-PSK $P_{E_{M\text{-PSK}}} \approx 2Q\left(\sqrt{2R_c \log_2 M \cdot E_b/N_0} \sin(\pi/M)\right)$ $W_{\min} = \frac{1}{T}, r_{\max} = b$

- M-FSK: $P_E \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{R_c \frac{E_b}{N_0} \log_2 M}\right)$ $W_{\min} = \frac{M}{2T}, r_{\max} = \frac{b}{2^{b-1}}$



Capacità (asintotica) di un canale

- Canale AWGN monodimensionale (modulazione di ampiezza, ingresso a valori reali, uscita a valori reali) (teorema di Shannon: $R = R_c \log_2 M < C$)

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_N^2} \right) \frac{\text{bit infor.}}{\text{simbolo}} \quad \frac{S}{N} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_N^2} = \frac{E_s}{N_0/2} = 2 \frac{E_s}{N_0}$$

- Capacità in bit informazione al secondo (formula di Hartley-Shannon)

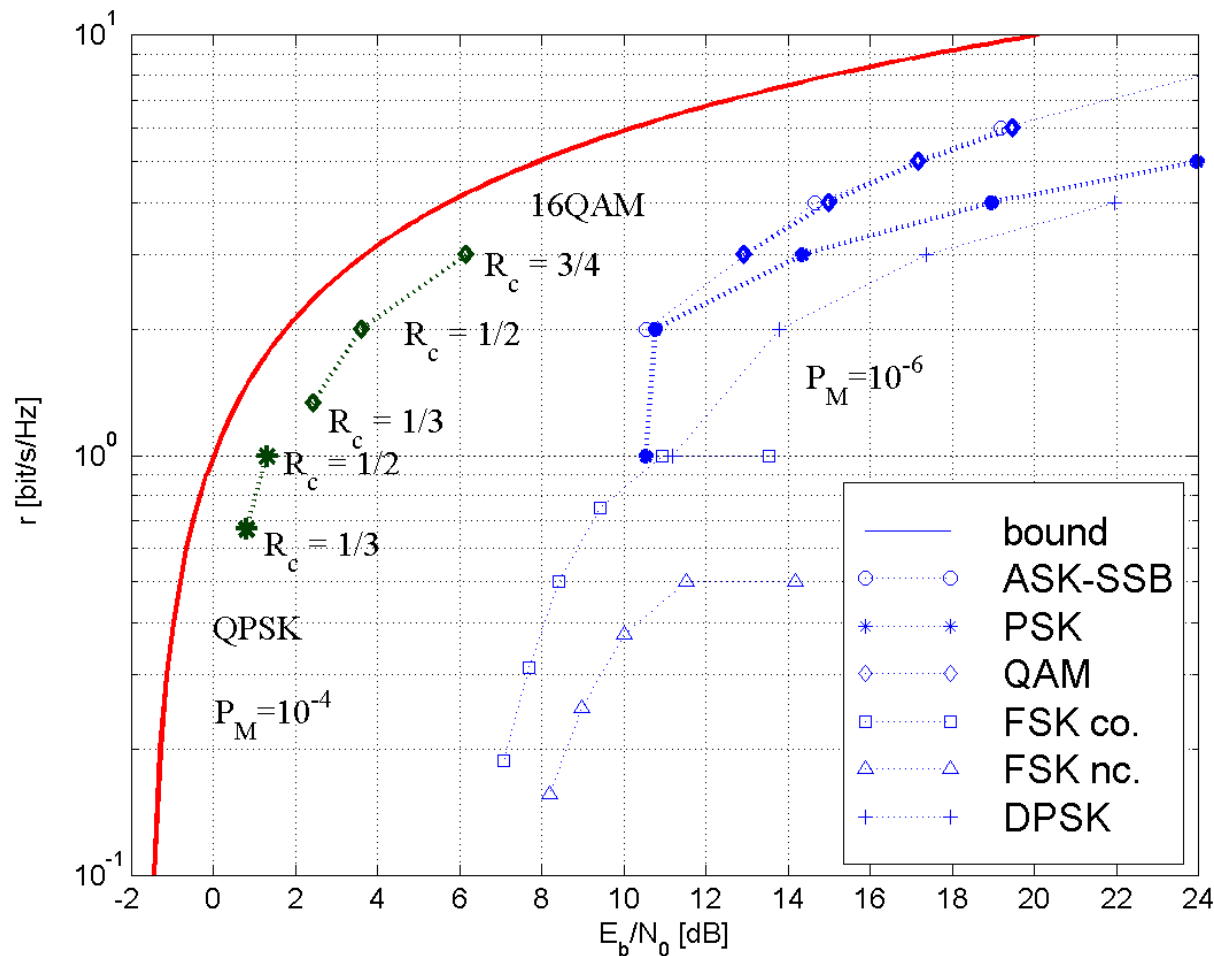
$$C_i = \frac{C}{T} = \frac{1}{2T} \log_2 \left(1 + 2 \frac{E_{\text{av}}}{N_0} \right) = W \log_2 \left(1 + 2 \frac{R E_b T}{N_0 T} \right) = W \log_2 \left(1 + \frac{R_s E_b}{W N_0} \right) \frac{\text{bit}}{\text{s}}$$

- Efficienza spettrale (bit/s/Hz) (vale per tutte le modulazioni)

$$r_{\text{max}} = \frac{C_i}{W} = \log_2 \left(1 + r_{\text{max}} \frac{E_b}{N_0} \right) \frac{\text{bit}}{\text{s} \cdot \text{Hz}}, \quad \frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{r_{\text{max}}} - 1}{r_{\text{max}}}$$

Prestazioni limite

- Formula di Shannon: $r_{\max} = \log_2 \left(1 + r_{\max} \frac{E_b}{N_0} \right) \frac{\text{bit}}{\text{s} \cdot \text{Hz}}$, $\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{r_{\max}} - 1}{r_{\max}}$

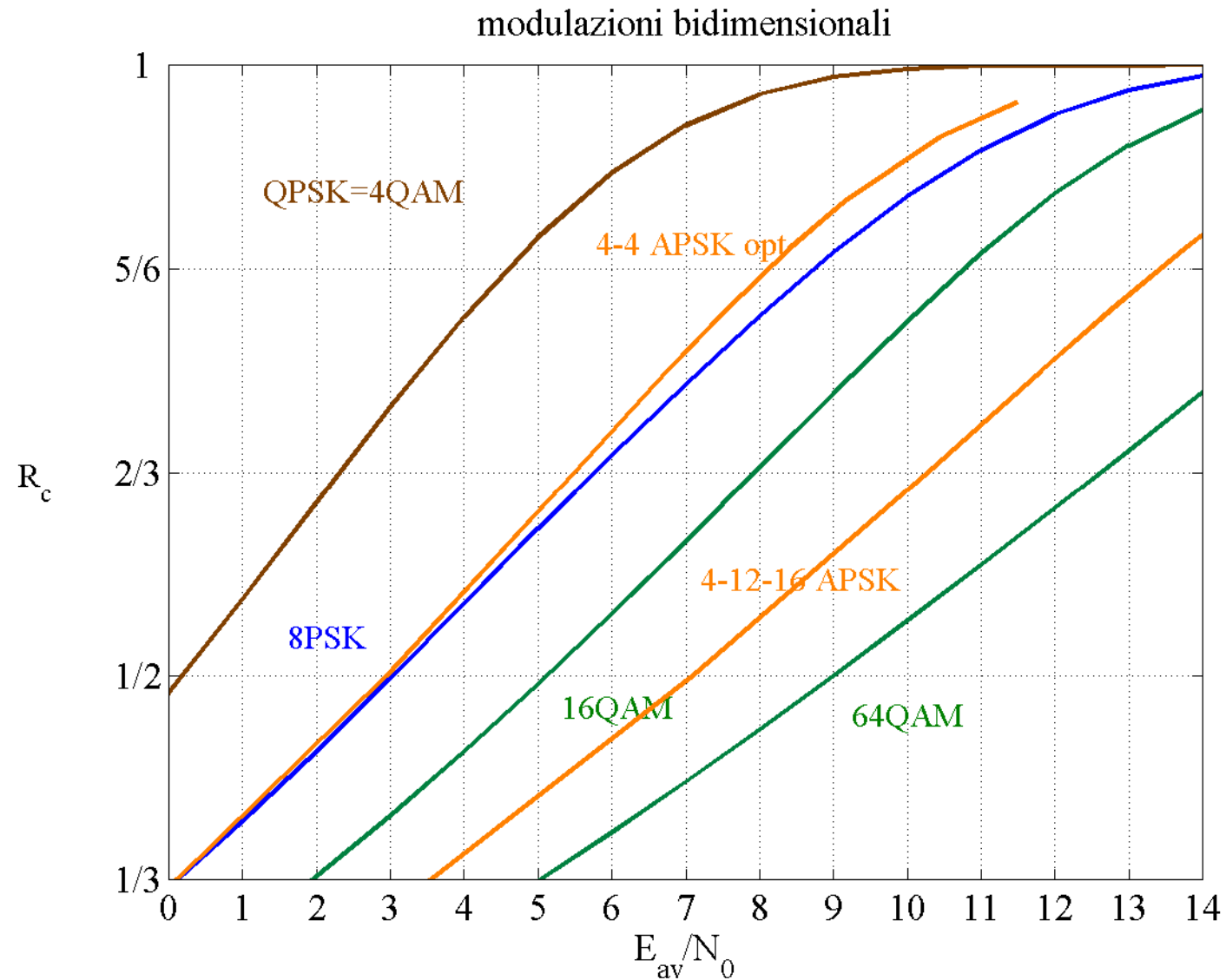


Incremento energia
M-PSK vs M-QAM

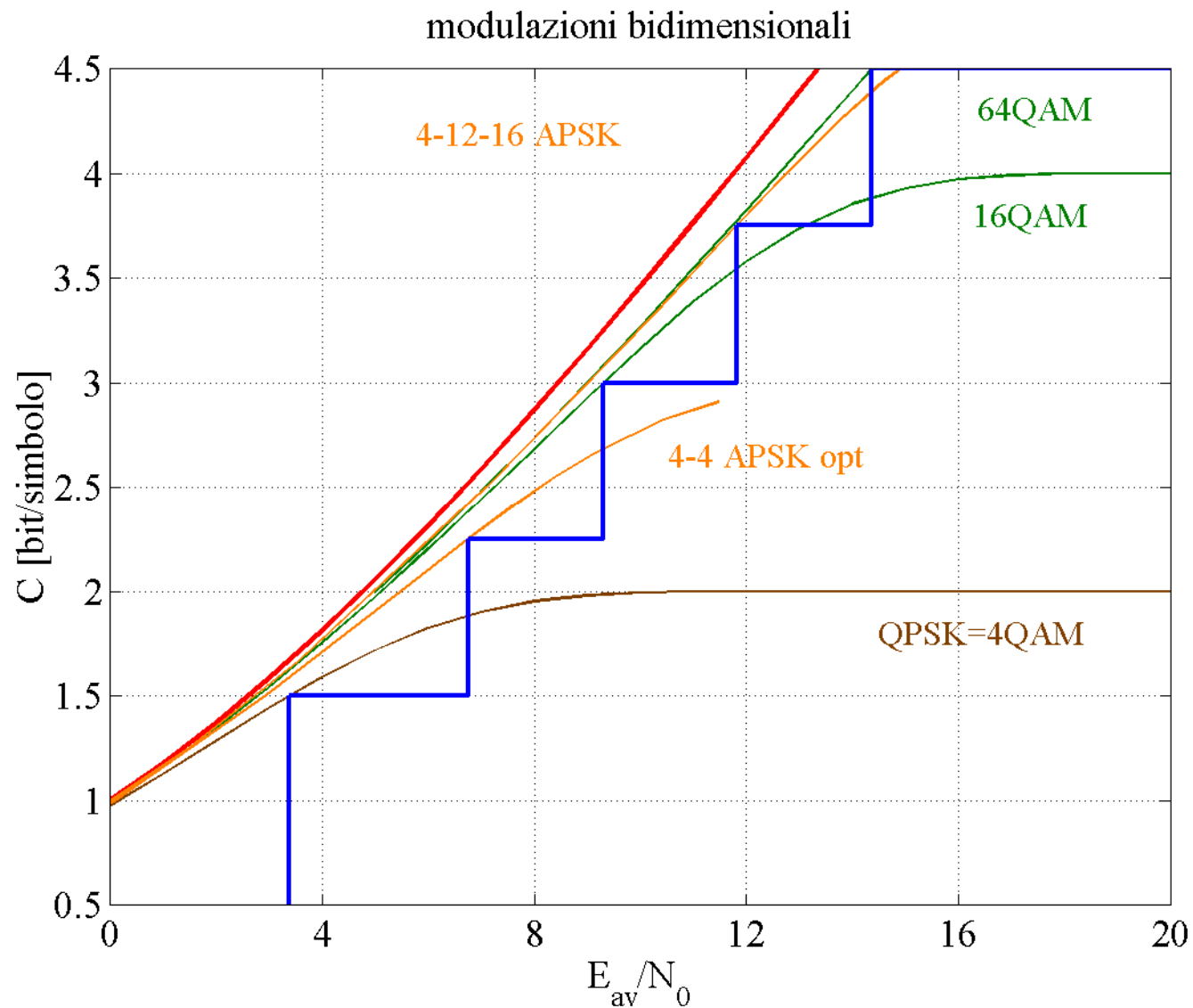
$$R_M = \frac{3/(M-1)}{2\sin^2(\pi/M)}$$

M	R_M (dB)
4	0
8	1.65
16	4.2
32	7.02
64	9.95
128	12.92
256	15.91

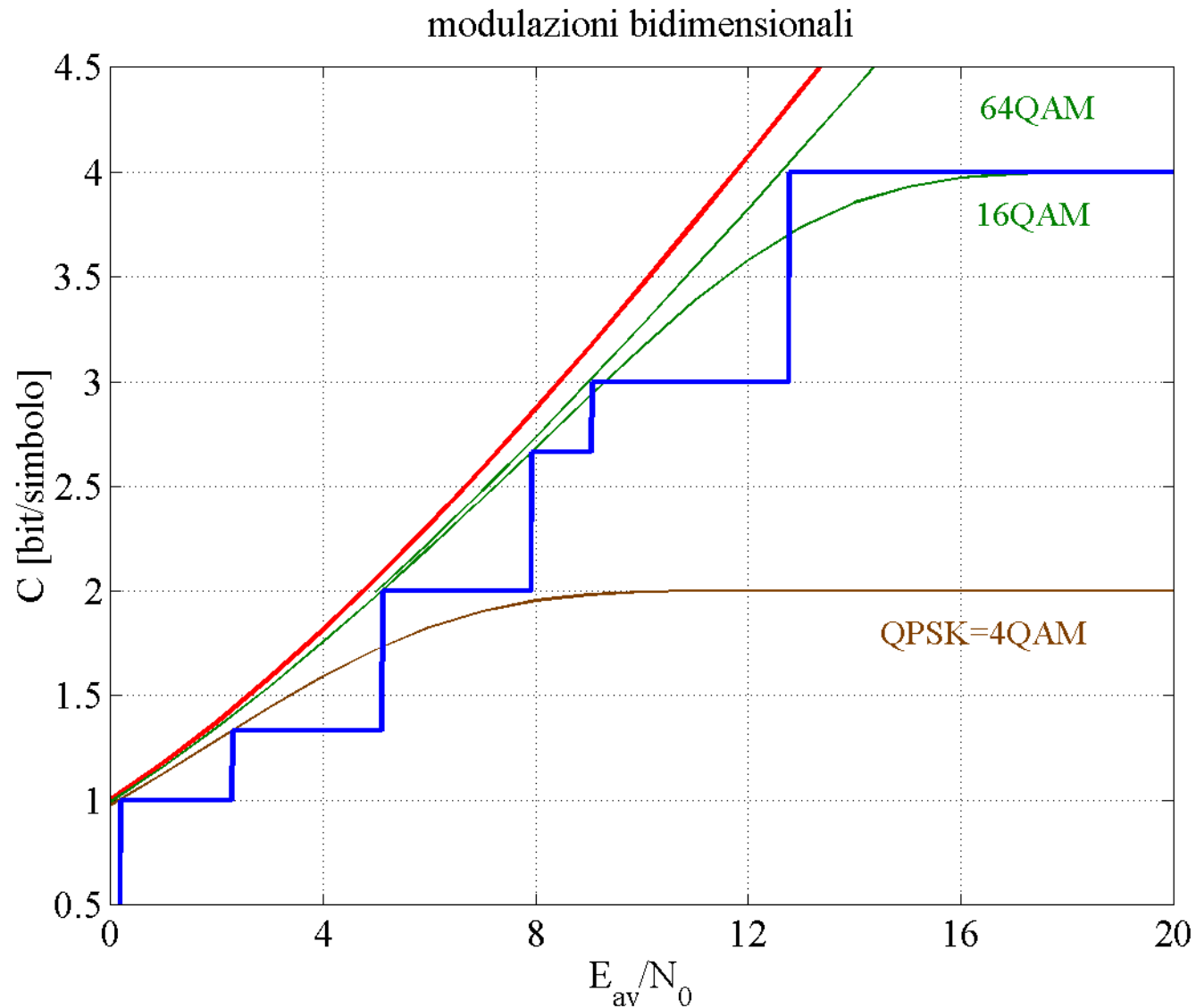
Prestazioni limite delle modulazioni



Sistema adattativo ($R_c=3/4$)



Sistema adattativo QPSK, 16QAM, 64QAM, $R_c=1/2, 2/3$





Multiplazione

- Si considerino due copie trasmettitore/ricevitore indipendenti , operanti sul medesimo canale.
- Sia N_i la densità spettrale di potenza vista dal ricevitore i -mo.
- Sia $P=P_1+P_2$ la potenza complessiva a disposizione (fissata) e W la banda complessiva a disposizione (fissata).
- Capacità massima coppia i -ma.

$$C_{s_i} = W_i \log_2 \left(1 + \frac{P_i}{N_i W_i} \right) \frac{\text{bit}}{\text{s}}$$



TDM - FDM

- **TDM** (*Time Division Multiplexing* base): ciascun canale utilizza tutta la banda disponibile e tutta la potenza disponibile, per una frazione del tempo. Sia $0 \leq \alpha \leq 1$.

$$R_{s_1} = W \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_1 W} \right) \alpha \quad \frac{\text{bit}}{\text{s}}, \quad R_{s_2} = W \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_2 W} \right) (1 - \alpha) \quad \frac{\text{bit}}{\text{s}}$$

- **FDM** (*Frequency Division Multiplexing*): Sia W_i la banda usata dall' i -ma coppia, e P_i la relativa potenza, con $W_1 + W_2 = W$ e $P_1 + P_2 = P$.

$$R_{s_1} = W_1 \log_2 \left(1 + \frac{P_1}{N_1 W_1} \right) \quad \frac{\text{bit}}{\text{s}}, \quad R_{s_2} = W_2 \log_2 \left(1 + \frac{P_2}{N_2 W_2} \right) \quad \frac{\text{bit}}{\text{s}}$$



CDM

- **CDM** (*Code Division Multiplexing*: senza cancellazione dell'interferenza, supposta gaussiana). Entrambi i trasmettitori utilizzano tutta la banda. Sia P_i la potenza usata dalla i -ma coppia ($P_1+P_2=P$).

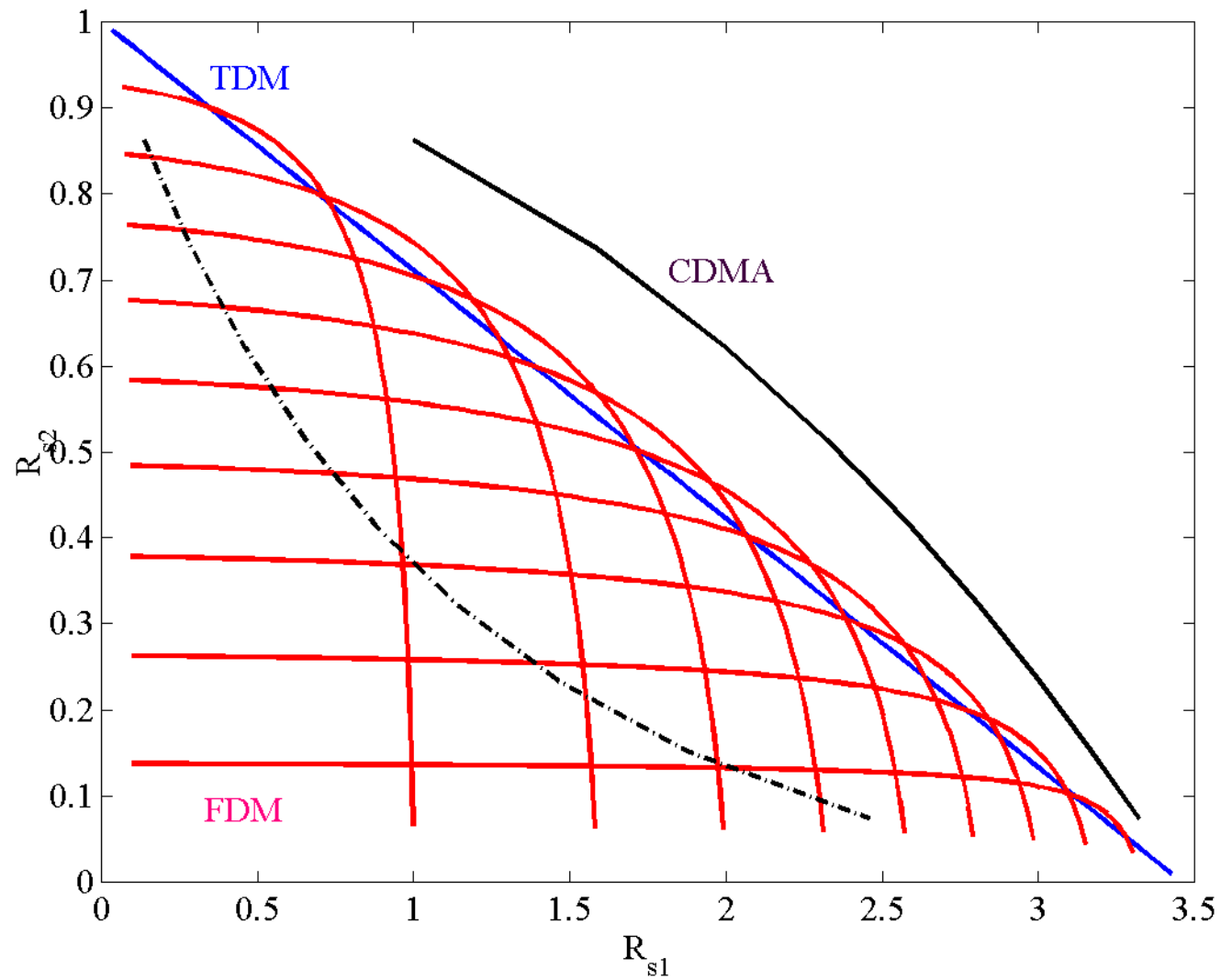
$$R_{s_1} = W \log_2 \left(1 + \frac{P_1}{N_1 W + P_2} \right) \frac{\text{bit}}{\text{s}}, \quad R_{s_2} = W \log_2 \left(1 + \frac{P_2}{N_2 W + P_1} \right) \frac{\text{bit}}{\text{s}}.$$

- **CDM** (*Code Division Multiplexing*: con cancellazione dell'interferenza). Il ricevitore con il rapporto segnale/trasmettitore. Sia $N_1 < N_2$

$$R_{s_1} = W \log_2 \left(1 + \frac{P_1}{N_1 W} \right) \frac{\text{bit}}{\text{s}}, \quad R_{s_2} = W \log_2 \left(1 + \frac{P_2}{N_2 W + P_1} \right) \frac{\text{bit}}{\text{s}}.$$

Confronto

$P/(WN_1)=10; P/(WN_2)=1; W=1$



Capacità di un insieme di canali indipendenti, con un vincolo sulla potenza complessiva



$$C = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P_n}{\sigma_n^2} \right)$$
$$= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \max \left[0, \log_2 \left(\frac{B}{\sigma_n^2} \right) \right]$$

dove $B = P_n + \sigma_n^2$

$$P = \sum_{n=1}^N \max \left[0, B - \sigma_n^2 \right]$$

- Dimostrazione: massimizzare C , rispettando il vincolo $\sum_{n=1}^N P_n = P$.
- Sia $g = \sum_{n=1}^N P_n - P$.
- Massimo utilizzando i moltiplicatori di Lagrange. $\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial P_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial P_n} = 0 \\ g = 0 \end{cases} \quad \forall n$

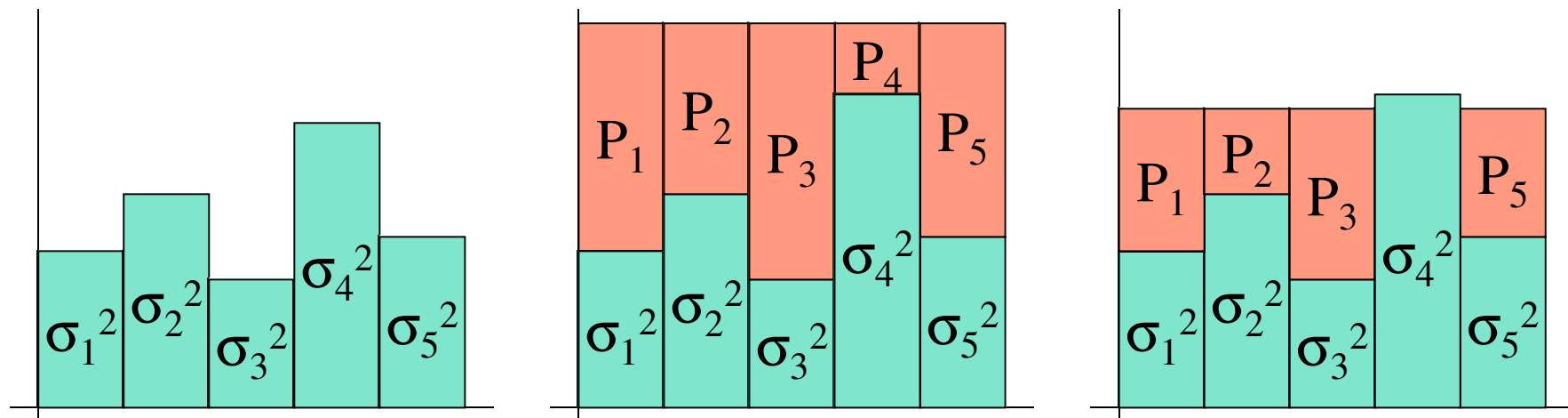
Essendo $\frac{\partial C}{\partial P_n} = \frac{1}{2 \ln(2)} \frac{1}{\sigma_n^2 + P_n}$ e $\frac{\partial g}{\partial P_n} = 1$

si ottiene $P_n + \sigma_n^2 = \text{costante}$.



Water filling

- Doppio vincolo: $P_n + \sigma_n^2 = \text{costante}$, $\sum_{n=1}^N P_n = P$.
- Nel secondo esempio il canale 4 è in *outage*.





Filtro adattato (canale lineare, rumore AWGN)

- Sia $r(t) = x(t) + v(t)$ il segnale ricevuto nell'intervallo $0-T$ (forma d'onda informazione + rumore additivo gaussiano bianco di varianza $N_0/2$).
Sia $X(f) = G_t(f)C(f)$, e sia $g_r(t)$ la risposta impulsiva del filtro di ricezione, con trasformata di Fourier data da $G_r(f)$.
- Il segnale filtrato è espresso dalla $u(t) = x(t) \otimes g_r(t) + v(t) \otimes g_r(t) = y(t) + n(t)$
- Nell'istante di decisione, T , il rapporto segnale rumore è dato da:

$$SNR = \frac{|y(T)|^2}{E[|n(T)|^2]} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} X(f) G_r(f) e^{j2\pi fT} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_r(f)|^2 df}$$

- Utilizzando la disuguaglianza di Schwarz otteniamo

$$SNR \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |G_r(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_r(f)|^2 df} = \frac{2E_s}{N_0}$$

- = sse $G_r(f) \propto \left[X(f) e^{j2\pi fT} \right]^*$, da cui $g_r(t) \propto x^*(T-t)$.