1

Si calcoli l'integrale

$$\int_{-1}^{+1} dx \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha} \quad ,$$

dove α è un parametro reale con $-1 < \alpha < 1$.

Soluzione : Consideriamo la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{(z+1)^\alpha}{(z-1)^\alpha}$, in cui le potenze con esponente α al denominatore e al numeratore si intendono definite usando il ramo principale della funzione w^α, ovvero il ramo con un taglio lungo l'asse reale negativo della variabile w, e con valori nel settore del piano complesso $-i\pi\alpha \leq \mathrm{Arg}(w^\alpha) < i\pi\alpha$. Pertanto il numeratore di $f(z)$ ha un taglio per $z = x$ reale con $x \leq -1$, e in questi punti ha limite $(-x-1)^\alpha e^{i\pi\alpha}$ da sopra (parte immaginaria positiva) e $(-x-1)^\alpha e^{-i\pi\alpha}$ da sotto (parte immaginaria negativa), mentre il denominatore ha un taglio per $z = x$ reale e $x \leq 1$, e in questi punti ha limite $(1-x)^\alpha e^{i\pi\alpha}$ da sopra (parte immaginaria positiva) e $(1-x)^\alpha e^{-i\pi\alpha}$ da sotto (parte immaginaria negativa). Vediamo che nel rapporto che definisce $f(z)$ i fattori di $e^{\pm i\pi\alpha}$ si cancellano tra numeratore e denominatore quando $x \leq -1$, e dunque la funzione f non ha discontinuità ed è olomorfa in quei punti. Il taglio di $f(z)$ si estende solo per $-1 \leq x \leq 1$, e in questi punti $f(z)$ ha limite $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\alpha e^{-i\pi\alpha}$ da sopra (parte immaginaria positiva) e $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\alpha e^{i\pi\alpha}$ da sotto (parte immaginaria negativa). Consideriamo l'integrale su un cammino γ_T che circonda il taglio in senso antiorario. Scegliendo la variabile x come parametro, questo cammino darà l'integrale della funzione da -1 a 1 sotto il taglio più l'integrale della funzione da 1 a -1 sopra il taglio. Dunque si può scrivere come

$$\oint_{\gamma_T} dz f(z) = (e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}) \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\alpha dx = 2i\sin(\pi\alpha) \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\alpha dx \ .$$

A questo punto possiamo semplicemente calcolare l'integrale su γ_T usando il teorema esterno dei residui. A parte i punti di diramazione in $z = \pm 1$ la funzione $f(z)$ non ha nessuna singolarità, dunque troviamo

$$\oint_{\gamma_T} dz f(z) = -2\pi i \,\mathrm{Res}_f(\infty) \ .$$

Per calcolare il residuo all'infinito dobbiamo espandere $f(z)$ per grande z e ottenere il coefficiente di $1/z$, quest'ultimo è l'opposto del residuo. Per calcolare quest'espansione notiamo che per $|z|$ grande vale

$$(z \pm 1)^\alpha = \left(z\left(1 \pm \frac{1}{z}\right)\right)^\alpha = z^\alpha \left(1 \pm \frac{1}{z}\right)^\alpha = z^\alpha \left(1 \pm \frac{\alpha}{z} + \mathcal{O}(z^{-2})\right) \ .$$

Notiamo che nella seconda uguaglianza possiamo distribuire la potenza tra i due fattori perché per grande z il secondo fattore è molto vicino a 1 ed è sempre possibile distribuire la potenza in questo caso.[1] Dunque abbiamo il seguente sviluppo per grande $|z|$

$$f(z) = \frac{\cancel{z^\alpha}\left(1 + \frac{\alpha}{z} + \mathcal{O}(z^{-2})\right)}{\cancel{z^\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{z} + \mathcal{O}(z^{-2})\right)} = 1 + \frac{2\alpha}{z} + \mathcal{O}(z^{-2}) \ .$$

Quindi $\mathrm{Res}_f(\infty) = -2\alpha$ e infine troviamo

$$2i\sin(\pi\alpha)\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\alpha dx = -2\pi i(-2\alpha) \ \Rightarrow \ \int_{-1}^{+1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\alpha dx = \frac{2\pi\alpha}{\sin(\pi\alpha)} \ .$$

Come check del risultato finale, notiamo che ha il valore giusto nel caso $\alpha = 0$, in cui abbiamo semplicemente $\int_{-1}^{1} dx = 2$ e in effetti $\lim_{\alpha\to 0} \frac{2\pi\alpha}{\sin(\pi\alpha)} = 2$, e anche che ha una divergenza per $\alpha \to \pm 1$ dovuta al fatto che $\sin(\pm\pi) = 0$, e in effetti l'integrale $\int_{-1}^{1} dx \frac{1\pm x}{1\mp x}$ è divergente.[2]

2

Si definisca la funzione $F(w)$ tramite l'integrale

$$F(w) = \int_0^\infty dx \, \frac{\log(x)}{(x+1)(x+w)} \ ,$$

in cui w è un parametro che varia nel piano complesso escluso l'asse reale negativo (per w reale negativo l'integrale diverge). Si calcoli la discontinuità

$$\mathrm{Disc}_F(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(F(x+i\epsilon) - F(x-i\epsilon)\right) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , \quad x < 0 \ .$$

Soluzione 1: Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{\log(z)^2}{(z+1)(z+w)}$, scegliendo il ramo della funzione $\log(z)$ con un taglio lungo l'asse reale positivo e con parte immaginaria nella striscia $0 \leq \mathrm{Im}(\log(z)) < 2\pi i$. Consideriamo un cammino γ che va sull'asse reale da $x = R > 0$ a

[1] Per capire meglio il perché, analizziamo quando fallisce l'identitá $z_1^\alpha z_2^\alpha = (z_1 z_2)^\alpha$. Abbiamo scelto il ramo della funzione w^α che ha valori nel settore $-i\pi\alpha \leq \mathrm{Arg}(w^\alpha) < i\pi\alpha$, ma il prodotto di due numeri complessi in questo settore non è necessariamente ancora in questo settore, ad esempio $e^{i\frac{2\pi}{3}\alpha}$ e $e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}$ sono in questo settore, ma il loro prodotto $e^{i\frac{7\pi}{6}\alpha}$ non lo è. Dunque se scegliamo $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ e $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, il prodotto di z_1^α e z_2^α sicuramente non potrà uguagliare $(z_1 z_2)^\alpha$, perchè quest'ultimo numero si troverà ancora nel settore $-i\pi\alpha \leq \mathrm{Arg}(w^\alpha) < i\pi\alpha$ con la nostra scelta del ramo (se invece cambiassimo il ramo con cui calcoliamo $(z_1 z_2)^\alpha$, l'identità sarebbe verificata scegliendo il ramo opportuno). Da questa analisi risulta chiaro che il problema non sussiste se uno dei due numeri ha argomento che puó essere piccolo a piacere, come nel caso di $(1 \pm \frac{1}{z})$ nel limite di $z \to \infty$. Prendendo l'argomento piccolo a piacere possiamo sempre fare in modo che l'argomento del prodotto $z^\alpha(1 \pm \frac{1}{z})^\alpha$ rimanga nel settore $-i\pi\alpha \leq \mathrm{Arg}(w^\alpha) < i\pi\alpha$.

[2] Mentre l'integrale converge solo per $-1 < \alpha < 1$, o piú in generale per $\alpha \in \mathbb{C}$ con $-1 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$, l'espressione $\frac{2\pi\alpha}{\sin(\pi\alpha)}$ è una funzione olomorfa di α su tutto $\mathbb{C}$ tranne i punti interi $\neq 0$. Dunque $\frac{2\pi\alpha}{\sin(\pi\alpha)}$ è un'estensione analitica della funzione di α definita dall'integrale.

$x = 0$ sotto il taglio, da $x = 0$ a $x = R$ sopra il taglio, ed è chiuso con un arco di raggio R. Prendendo $R > \mathrm{Max}\{|w|, 1\}$, questo cammino chiuso ha il suo interno un polo semplice in $z = -1$ e un polo semplice in $z = -w$, quindi troviamo

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma dz f(z) &= 2\pi i \left(\mathrm{Res}_f(-1) + \mathrm{Res}_f(-w)\right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{\log(-1)^2}{-1+w} + \frac{\log(-w)^2}{-w+1} \right) \\
&= 2\pi i \frac{(\pi i)^2 - (\log(w) + \pi i)^2}{w-1} \\
&= -2\pi i \frac{\log(w)^2 + 2\pi i \log(w)}{w-1} \\
&= -2\pi i \frac{\log(w)^2}{w-1} + 4\pi^2 \frac{\log(w)}{w-1} \ .
\end{aligned} \tag{1}$$

Nella terza riga abbiamo usato $\log(-w) = \log(w) + \pi i$ e in questa identitá si intende che nel membro sinistro abbiamo il ramo del logaritmo con il taglio sull'asse reale positivo e parte immaginaria $\in [0, 2\pi[$, mentre nel membro destro abbiamo il ramo del logaritmo con taglio sull'asse reale negativo e parte immaginaria $\in [-\pi, \pi[$, ovvero il ramo principale del logaritmo che coincide con l'usuale logaritmo reale sull'asse reale positivo.

Possiamo ora calcolare lo stesso integrale notando che nel limite $R \to \infty$ l'integrale sull'arco di raggio R va a zero, perché il modulo di $f(z)$ sull'arco va come $\frac{\log(R)^2}{R^2}$ per R grande, e dunque decresce più velocemente di $1/R$. Dunque in questo limite l'integrale su γ è dato da un integrale da $+\infty$ a 0 sull'asse reale sotto il taglio, più un integrale da 0 a $+\infty$ sull'asse reale sopra il taglio. Quindi troviamo

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma dz f(z) &= \int_{+\infty}^0 dx \, \frac{(\log(x) + 2\pi i)^2}{(x+1)(x+w)} + \int_0^{+\infty} dx \, \frac{\log(x)^2}{(x+1)(x+w)} \\
&= \int_0^{+\infty} dx \, \frac{\log(x)^2 - (\log(x) + 2\pi i)^2}{(x+1)(x+w)} \\
&= \int_0^{+\infty} dx \, \frac{-4\pi i \log(x) - (2\pi i)^2}{(x+1)(x+w)} \\
&= -4\pi i \int_0^{+\infty} dx \, \frac{\log(x)}{(x+1)(x+w)} + 4\pi^2 \int_0^{+\infty} dx \frac{1}{(x+1)(x+w)} \ .
\end{aligned} \tag{2}$$

Per concludere dobbiamo dunque calcolare anche l'integrale $\int_0^{+\infty} dx \frac{1}{(x+1)(x+w)}$. Per svolgere questo integrale possiamo considerare $g(z) = \frac{\log(z)}{(z+1)(z+w)}$, e ripetere il procedimento svolto sopra con $f(z)$. In questo caso troviamo usando il teorema dei residui

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma dz g(z) &= 2\pi i \left(\mathrm{Res}_g(-1) + \mathrm{Res}_g(-w)\right) \\
&= 2\pi i \left(\frac{\log(-1)}{-1+w} + \frac{\log(-w)}{-w+1}\right) \\
&= 2\pi i \frac{\pi i - (\log(w) + \pi i)}{w-1} \\
&= -2\pi i \frac{\log(w)}{w-1} \ ,
\end{aligned}$$

e d'altra parte scrivendo esplicitamente il cammino sull'asse reale positivo attorno al taglio

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma dz g(z) &= \int_{+\infty}^{0} dx\, \frac{\log(x) + 2\pi i}{(x+1)(x+w)} + \int_0^{+\infty} dx\, \frac{\log(x)}{(x+1)(x+w)} \\
&= \int_0^{+\infty} dx\, \frac{\log(x) - (\log(x) + 2\pi i)}{(x+1)(x+w)} \\
&= -2\pi i \int_0^{+\infty} dx\, \frac{1}{(x+1)(x+w)} \ .
\end{aligned}$$

Comparando le due formule per $\oint_\gamma dz g(z)$ abbiamo quindi

$$\int_0^{+\infty} dx\, \frac{1}{(x+1)(x+w)} = \frac{\log(w)}{w-1} \ .$$

Sostituendo questo risultato in (2) e comparando con (1) abbiamo

$$\begin{aligned}
&-4\pi i \int_0^{+\infty} dx\, \frac{\log(x)}{(x+1)(x+w)} + \cancel{4\pi^2 \frac{\log(w)}{w-1}} = -2\pi i \frac{\log(w)^2}{w-1} + \cancel{4\pi^2 \frac{\log(w)}{w-1}} \\
&\Longrightarrow F(w) = \frac{1}{2} \frac{\log(w)^2}{w-1} \ .
\end{aligned}$$

Ricordiamo che, per via della sostituzione $\log(-w) = \log(w) + i\pi$, il $\log(w)$ che compare al quadrato al numeratore di $F(w)$ è il ramo principale del logaritmo, con taglio sull'asse reale negativo e parte immaginaria $\in [-\pi, \pi[$. Avendo calcolato F possiamo quindi calcolare la sua discontinuità in un generico x reale negativo

$$\mathrm{Disc}_F(x) = \frac{1}{2} \frac{(\log(-x) + \pi i)^2}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{(\log(-x) - \pi i)^2}{x-1} = 2\pi i \frac{\log(-x)}{x-1} \ .$$

Soluzione 2: In questo secondo approccio calcoleremo direttamente la discontinuità senza calcolare $F(w)$. Per evitare confusione tra il punto x in cui vogliamo calcolare la discontinuità e la variabile di integrazione, riscriviamo l'integrale che definisce $F(w)$ usando t come variabile di integrazione

$$F(w) = \int_0^{\infty} dt\, \frac{\log(t)}{(t+1)(t+w)} \ .$$

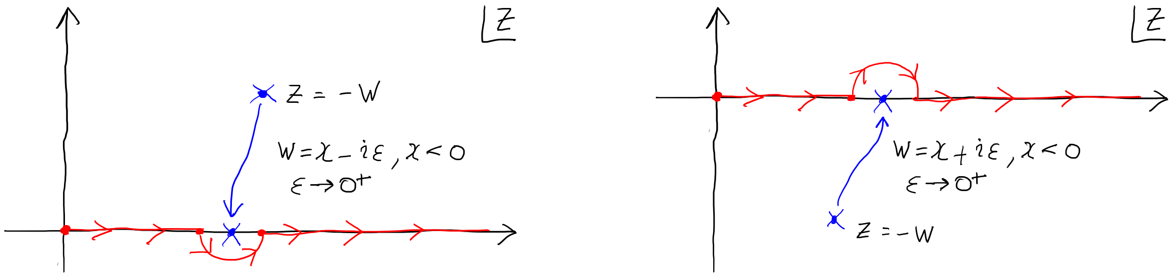

Figure 1: Deformazioni del cammino che calcolano il limite di $F(w = x \pm i\epsilon)$ per $\epsilon \to 0^+$.

Possiamo interpretare questo integrale come l'integrale su un cammino dato da una semiretta da 0 a ∞ della funzione di variabile complessa $h(z) = \frac{\log(z)}{(z+1)(z+w)}$ dove $\log(z)$ è il ramo principale del logaritmo, con discontinuità sull'asse reale negativo e parte immaginaria $\in [-\pi, \pi[$. Ci viene chiesto di calcolare la discontinuità per $w \to x$, dove x è un reale negativo, e in effetti vediamo che l'integrale in questo limite diventa singolare perché il polo in $z = -w$ si verrebbe a trovare sul cammino di integrazione. Al fine di calcolare il limite dell'integrale, però, possiamo deformare il cammino in modo da aggirare il polo che sta andando a collidere con il cammino di integrazione.

Come illustrato in figura 1 quando $w \to x$ da sotto, ovvero con parte immaginaria negativa, visto che il polo è nel punto $-w$ esso si avvicinerà al cammino di integrazione da sopra. In questo caso possiamo deformare il cammino in: un segmento da 0 a $-x-\delta$, più una semicirconferenza di raggio δ centrata in $-x$ nel semipiano inferiore, più una semiretta da $x+\delta$ a $+\infty$. In questo modo quando w tende a x da sopra non collide più con il cammino di integrazione. Analogamente per calcolare il limite di $w \to x$ da sopra il polo si avvicinerà al cammino di integrazione da sotto e deformeremo il cammino aggirando il punto $z = -x$ stavolta con una semicirconferenza di raggio δ nel semipiano superiore. Come illustrato in fig. 2, prendendo la differenza dei due limiti, vediamo che la parti del cammino da 0 a $-x-\delta$ e da $x+\delta$ a $+\infty$ si cancellano, e quello che rimane sono solo i due archi la cui differenza forma un cammino circolare centrato nel punto $z = -x$ di raggio δ percorso in senso antiorario. Visto che nel limite $w \to x$ la funzione $h(z)$ ha un polo in questo punto, possiamo calcolare questo integrale col teorema dei residui e otteniamo

$$\mathrm{Disc}_F(x) = -2\pi i \,\mathrm{Res}_{\frac{\log(z)}{(z+1)(z+x)}}(-x) = 2\pi i \frac{\log(-x)}{x-1} \ .$$

Vediamo che la risposta coincide con quella trovata con il calcolo esplicito di $F(w)$.

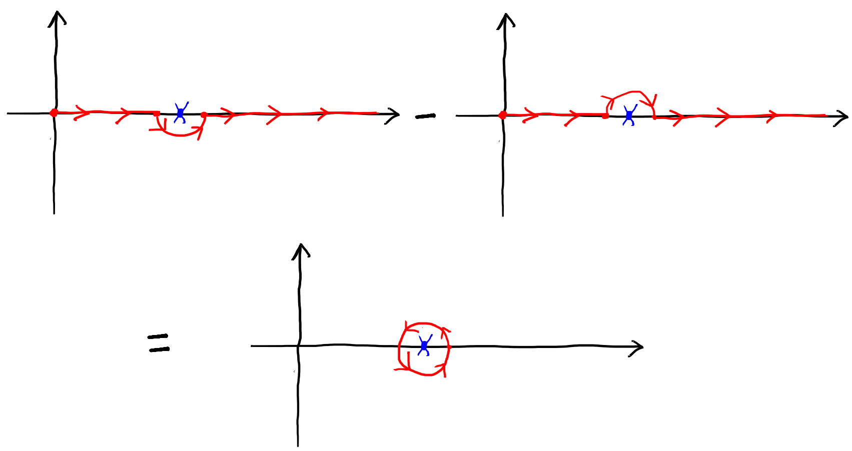

Figure 2: La differenza tra i due limiti, che calcola la discontinuità, è uguale a un integrale su un cammino circolare attorno al polo in $z = -x$.