Esercizi Algebra 1 - 11/11/20

(annaspagnolo97@gmail.com, francesco.digiorgio@studenti.units.it)

Esercizio 1

Sia $f : X \to Y$ un'applicazione e sia ρ' una relazione d'equivalenza su Y.
Dimostrare che ρ è una relazione d'equivalenza, dove

$$x_1 \, \rho \, x_2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x_1)\rho' f(x_2)$$

Quali sono le classi di equivalenza di ρ?

Se fissiamo $X = Y = \mathbb{R}$ e $f(x) = x^2$, com'è definita l'equivalenza associata ad f (quella per cui ρ' è l'uguaglianza di $\mathbb{R}$)?
Descrivere le classi d'equivalenza e l'insieme quoziente.

Esercizio 2

Dimostrare che la famiglia $\mathcal{F}$ è una partizione di X.

1. $X = \mathbb{C}$ $\qquad \mathcal{F} = \{\mathbb{C}_\alpha \mid \alpha \geq 0\}$ $\qquad \mathbb{C}_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \;\mid\; |z| = \alpha\}$.
2. $X = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ $\qquad \mathcal{F} = \{X_a \mid a \in \mathbb{R}^+\}$ $\qquad X_a = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \;\mid\; y = ax^2\}$.

Esercizio 3

Su $\mathbb{R}$ sia definita l'operazione:

$$x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

1. Si mostri che $(\mathbb{R}, \star)$ è un gruppo abeliano.
2. Si verifichi che la mappa:

$$\begin{aligned} f\colon (\mathbb{R}, \star) &\to (\mathbb{R}, +) \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

   è un *isomorfismo* di gruppi.

Esercizio 4

Posto $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si definisca in $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ l'operazione:

$$(a, b) \bullet (c, d) = (ac, bc + d).$$

1. Si mostri che $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \bullet)$ è un gruppo.
2. Si verifichi che la relazione:

   $$(a, b) \sim (c, d) \leftrightarrow a = c$$

   è di equivalenza. Si mostri inoltre che è compatibile con l'operazione definita.

Esercizio 5

Posto $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si definisca in $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ l'operazione:

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac, ad + \frac{b}{c}).$$

1. Si mostri che $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \otimes)$ è un gruppo.
2. Si dimostri che $S = \{(a, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mid a = 1\}$ ne è un sottogruppo.
3. Si verifichi che la mappa:

   $$\begin{aligned} f \colon (\mathbb{R}, +) &\to (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \otimes) \\ x &\mapsto (1, x) \end{aligned}$$

   è un omomorfismo iniettivo di gruppi.