Esercizi Algebra 1 - 18/11/20

(annaspagnolo97@gmail.com, francesco.digiorgio@studenti.units.it)

Esercizio 1
Sia X insieme non vuoto e A,$B \subset X$. Si dica in quali dei seguenti casi $(\mathcal{P}(X), \circ)$ è un gruppo:

1. $A \circ B = A \bigcup B$ (unione);
2. $A \circ B = A \bigcap B$ (intersezione);
3. $A \circ B = A \setminus B$ (differenza);
4. $A \circ B = A \triangle B$ (differenza simmetrica).

Esercizio 2
Siano m,n e q numeri naturali t.c. $m = nq$. Dimostra che la mappa

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z}_n &\to \mathbb{Z}_m \\ [x]_n &\mapsto [qx]_m \end{aligned}$$

è ben definita e iniettiva.

Esercizio 3
Fissiamo $a, b \in \mathbb{R}$ e definiamo

$$\begin{aligned} \tau_{a,b}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax + b \end{aligned}$$

1. Dimostra che
$$G = \{\tau_{a,b} \ \mid \ a \neq 0\}$$
è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni.
2. Dimostra che
$$N = \{\tau_{a,b} \ \mid \ a = 1\}$$
è un sottogruppo normale di G.

Esercizio 4

1. Sia G un gruppo. Fissiamo $g \in G$. Verificare che l'applicazione

$$\gamma_g \colon G \longrightarrow G$$

$$x \longmapsto gxg^{-1}$$

   è un isomorfismo di gruppi.

2. Mostare che l'insieme

$$Int(G) = \{\gamma_g \ \mid \ g \in G\}$$

   è un sottogruppo normale di $Aut(G) = \{f \colon G \longrightarrow G \ \mid \ \text{f è un isomorfismo}\}$

Esercizio 5

Considerare il gruppo ciclico di ordine 24 $C_{24} = \langle g \rangle$. Individuare i suoi sottogruppi e i loro generatori. Fare la stessa cosa con C_{11}.

Esercizio 6

Determinare se le seguenti coppie sono gruppi isomorfi.

1. $\mathbb{Z}_7 \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$
2. $\mathbb{Z}_{28} \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{14}$
3. $\mathbb{Z}_{36} \quad \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$