ESERCIZI DI GEOMETRIA, FOGLIO 6

Trieste, 21 novembre 2020

1. Siano W_1, W_2 sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Sia $f : W_1 \times W_2 \to V$ l'applicazione definita da $f(w_1, w_2) = w_1 + w_2$ (dove $W_1 \times W_2$ denota il prodotto definito nel foglio 2).
   (i) Verificare che f è un'applicazione lineare.
   (ii) Determinare il sottospazio immagine di f; che cosa si può dire della sua dimensione?
   (iii) Descrivere gli elementi del nucleo di f ricordando che $Kerf \subset W_1 \times W_2$. Costruire una base per $Kerf$, a partire da una base di $W_1 \cap W_2$. Calcolare la dimensione di $Kerf$.
   (iv) Dare una dimostrazione della relazione di Grassmann come conseguenza del teorema della dimensione per l'applicazione f appena considerata.

2. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{leq3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nell'indeterminata x, e $\mathcal{B}$ la sua base $(1, x, x^2, x^3)$.
   (1) Sia $T : V \to V$ l'applicazione definita da $T(p(x)) = p'(x)(x - 1)$, dove p' denota la derivata di p. Verificare che T è lineare e scrivere la sua matrice rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e nel codominio;
   (2) descrivere $\ker(T)$, $\mathrm{Im}(T)$ e calcolare le loro dimensioni;
   (3) verificare che $V = \ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

3. Denotiamo con E_{ij} una matrice avente tutti gli elementi nulli, tranne quello di posto ij uguale a 1. Denotiamo poi con $E_{\lambda,i}$ una matrice quadrata diagonale avente sulla diagonale principale gli elementi $1, \dots, 1, \lambda, 1, \dots, 1$ con λ al posto d'indice i. Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti in K.
   (i) Calcolare il prodotto righe per colonne $E_{ij}A$ dove E_{ij} è di ordine $m \times m$;
   (ii) analogamente calcolare $E_{\lambda,i}A$;
   (iii) dedurre che le matrici ottenute da A con una trasformazione elementare del I o del II tipo si possono esprimere nella forma MA, con M matrice opportuna

4. (i) Sia $V = K[t]$ il K-spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata t a coefficienti nel campo K. Sia $\mathcal{B}$ la sua base (infinita) formata dai polinomi $v_i := t^i, i \in \mathbb{N}$. Siano v_i^* le forme lineari su V definite da $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ (simbolo di Kronecker). Dimostrare che tali forme lineari non generano lo spazio vettoriale duale V^* trovando esplicitamente una forma lineare su V che non appartiene al sottospazio generato dai v_i^*.

5. Calcolare il rango della seguente matrice reale al variare del parametro k:
$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$
Per quali valori di k questa matrice è invertibile?

6. Determinare il numero di elementi (ossia l'ordine) del gruppo $GL(n, \mathbb{Z}_p)$ delle matrici invertibili $n \times n$, con coefficienti nel campo finito $K = \mathbb{Z}_p$ (dove p è un numero primo). (Suggerimento: contare quanti basi distinte vi sono nello spazio vettoriale $K^n = (\mathbb{Z}_p)^n$.)