1

Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\sin x - x}{x^3}\ .$$

Soluzione: Per calcolare questo integrale con tecniche di analisi complessa, dobbiamo riscrivere la funzione seno in termini di esponenziale complesso: $\sin x = e^{ix}/(2i) - e^{-ix}/(2i)$, e poi calcolare separatamente il contributo dei due termini, usando il Lemma di Jordan. Mentre però la funzione integranda originale ha limite finito $-1/6$ per $x \to 0$, dunque sicuramente l'integrale converge nell'intorno di $x = 0$, se separiamo i due termini $e^{ix}/(2i)$ e $-e^{-ix}/(2i)$ ciascuno dei due termini dà luogo a una funzione integranda con una singolarità non integrabile nell'origine. Per ovviare questo problema, dapprima riscriviamo l'integrale originale come un limite, e poi separiamo i due termini, come segue:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{+\epsilon}^{+\infty}\right) dx \frac{\sin x - x}{x^3}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{+\epsilon}^{+\infty}\right) dx \frac{e^{ix}/(2i) - e^{-ix}/(2i) - x}{x^3}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{+\epsilon}^{+\infty}\right) dx \frac{(e^{ix}/(2i) - 1/(2i) - x/2) - (e^{-ix}/(2i) - 1/(2i) + x/2)}{x^3}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{+\epsilon}^{+\infty}\right) dx \frac{e^{ix}/(2i) - 1/(2i) - x/2}{x^3} - \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{+\epsilon}^{+\infty}\right) dx \frac{e^{-ix}/(2i) - 1/(2i) + x/2}{x^3}\ .
\end{aligned}$$

Si noti che nella terza uguaglianza abbiamo aggiunto e sottratto la costante $1/(2i)$ al numeratore, e abbiamo riscritto $-x = -x/2 - x/2$. In questo modo nell'ultimo passaggio abbiamo due funzioni integrande che viste come funzioni di variabile complessa z sono

$$f(z) = \frac{e^{iz}/(2i) - 1/(2i) - z/2}{z^3}\ ,\quad g(z) = \frac{e^{-iz}/(2i) - 1/(2i) + z/2}{z^3}\ ,$$

e hanno un polo semplice in $z = 0$: infatti i due termini che abbiamo al numeratore in aggiunta agli esponenziali coincidono (con segno opposto) con i primi due termini dello sviluppo di Taylor dell'esponenziale nell'origine, dunque lo sviluppo di Taylor della funzione al numeratore inizia da z^2, e visto che al denominatore abbiamo z^3 la funzione ha un polo semplice.

Consideriamo ora per la funzione $f(z)$ l'integrale sul cammino composto dai due segmenti sull'asse reale tra $-R$ e $-\epsilon$ e tra $+\epsilon$ e $+R$, che insieme denotiamo come $\gamma_{\mathbb{R}}$, da un semicerchio nel semipiano superiore percorso in senso antiorario di raggio R che chiamiamo $\gamma_R^{\rm up}$, e da un semicerchio nel semipiano superiore di raggio ϵ percorso in senso antiorario che chiamiamo $-\gamma_\epsilon^{\rm up}$.

Questo cammino chiuso non contiene alcuna singolaritá isolata, dunque[1]

$$\oint_{\gamma_{\mathbb{R}}+\gamma_R^{\rm up}-\gamma_\epsilon^{\rm up}} dz\, f(z) = 0\ .$$

Come abbiamo visto nella dimostrazione del Lemma di Jordan, il contributo del termine $e^{iz}/(2iz^3)$ sull'arco $\gamma_R^{\rm up}$ nel semipiano superiore tende a 0 nel limite $R\to\infty$,[2] e va pure a zero l'integrale su $\gamma_R^{\rm up}$ dei due termini aggiuntivi $\frac{-1/(2i)-z/2}{z^3}$, in questo caso semplicemente perchè la funzione integranda ha modulo che decresce più velocemente di $1/R$ nel limite. Pertanto in questo limite abbiamo

$$\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}+\int_{+\epsilon}^{+\infty}\right) dx \frac{e^{ix}/(2i)-1/(2i)-x/2}{x^3} = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{\mathbb{R}}} dz\, f(z) = \int_{\gamma_\epsilon^{\rm up}} dz\, f(z)\ .$$

Infine prendendo il limite $\epsilon\to 0^+$troviamo

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}+\int_{+\epsilon}^{+\infty}\right) dx \frac{e^{ix}/(2i)-1/(2i)-x/2}{x^3} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\gamma_\epsilon^{\rm up}} dz\, f(z)\ .$$

Per calcolare questo ultimo limite, utilizziamo il teorema che dice che l'integrale su un arco di apertura angolare α centrato in z_0 con raggio ϵ orientato in senso antiorario di una funzione $h(z)$ con un polo semplice in z_0 nel limite $\epsilon\to 0$ è uguale a $i\,\alpha\,\mathrm{Res}_h(z_0)$.[3] Dunque

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}+\int_{+\epsilon}^{+\infty}\right) dx \frac{e^{ix}/(2i)-1/(2i)-x/2}{x^3}\\
&= i\pi\,\mathrm{Res}_f(0)\\
&= i\pi\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{iz}/(2i)-1/(2i)-z/2}{z^2}\right)\\
&= -\frac{\pi}{4}\ .
\end{aligned}$$

Possiamo ora ripetere lo stesso procedimento per la funzione $g(z)$, e in questo caso chiuderemo con archi $\gamma_R^{\rm down}$ e $\gamma_\epsilon^{\rm down}$ nel semipiano inferiore. Facendo attenzione al fatto che in questo caso

[1] Puoi provare a pensare a come cambierebbe lo svolgimento dell'esercizio se invece avessimo scelto un semicerchio di raggio ϵ nel semipiano inferiore. In questo caso all'interno del cammino ci sarebbe una singolarità isolata, e...

[2] Ricorda che qui stiamo usando che e^{iz} decresce esponenzialmente quando z ha una parte immaginaria positiva, ovvero nel semipiano superiore, e che viceversa crescerebbe esponenzialmente nel semipiano superiore, per cui possiamo solo chiudere l'integrale di f con un arco nel semipiano superiore.

[3] Questo teorema vale solo se la funzione ha un polo semplice nel punto. Pertanto è importante che abbiamo aggiunto e sottratto la costante, e che abbiamo distribuito il termine $-x$ tra i due integrali nel modo che abbiamo visto sopra, ottenendo due funzioni con un polo semplice nell'origine.

$\gamma_\epsilon^{\text{down}}$ è percorso in senso antiorario, troviamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon}+\int_{+\epsilon}^{+\infty}\right)dx\,\frac{e^{-ix}/(2i)-1/(2i)+x/2}{x^3}\\
&=-\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\gamma_\epsilon^{\text{down}}}dz\,g(z)\\
&=-i\pi\,\mathrm{Res}_g(0)\\
&=-i\pi\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{-iz}/(2i)-1/(2i)+z/2}{z^2}\right)\\
&=\frac{\pi}{4}\ .
\end{aligned}$$

Infine mettendo assieme i due risultati otteniamo

$$I=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}\ .$$

2

Una corda elastica si estende lungo l'asse x nell'intervallo $[-L,L]$. Denotando con $u(t,x)$ lo spostamento verticale dalla posizione di equilibrio nel punto x al tempo t, l'equazione che ne determina l'evoluzione temporale è

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=C\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ .$$

Si consideri la condizione iniziale $u(0,x)=A(1-|x|/L)$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0$. Si trovi $u(t,x)$ usando la serie di Fourier.

Soluzione: Scriviamo la serie di Fourier per la funzione $u(t,x)$ come funzione di $x\in[-L,L]$ per ogni valore di t, dunque con coefficienti che dipendono da t

$$u(t,x)=\alpha_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+\beta_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]\ .$$

Abbiamo quindi[4]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left[\alpha_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+\beta_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]\ ,$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x)=\ddot\alpha_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ddot\alpha_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+\ddot\beta_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]\ ,$$

[4]Possiamo dare per buono il fatto che le derivate si possano commutare con la serie di Fourier, torneremo su questo punto più avanti nel corso.

dove il puntino denota la derivata rispetto al tempo. Sostituendo le espressioni per $\partial_x^2 u$ e $\partial_t^2 u$ nell'equazione d'onda, e comparando termine per termine le due serie di Fourier, otteniamo le seguenti equazioni per i coefficienti

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\alpha}_0(t) = 0 \ , \\
&\ddot{\alpha}_n(t) = -\omega_n^2 \alpha_n(t) \ , \quad n \geq 1 \\
&\ddot{\beta}_n(t) = -\omega_n^2 \beta_n(t) \ , \quad n \geq 1,
\end{aligned}
$$

dove

$$\omega_n := \sqrt{C}\frac{n\pi}{L} \ .$$

La soluzione generale di queste equazioni è

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0(t) = a_0 + \tilde{a}_0 t \ , \\
&\alpha_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + \tilde{a}_n \sin(\omega_n t) \ , \quad n \geq 1 \\
&\beta_n(t) = b_n \cos(\omega_n t) + \tilde{b}_n \sin(\omega_n t) \quad n \geq 1.
\end{aligned}
$$

Per determinare le costanti $a, \tilde{a}, b, \tilde{b}$ dobbiamo imporre le condizioni iniziali. A questo fine usiamo la formula per i coefficienti a $t = 0$. Per $\alpha_0(t = 0)$ abbiamo

$$
\begin{aligned}
\alpha_0(t = 0) &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} dx\, u(t = 0, x) \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} dx\, A(1 - |x|/L) \\
&= \frac{1}{L}\int_{0}^{+L} dx\, A(1 - x/L) \\
&= \frac{1}{L}(AL - A\frac{L^2}{2}\frac{1}{L}) \\
&= \frac{A}{2} \Longrightarrow a_0 = \frac{A}{2} \ .
\end{aligned}
$$

Per $\alpha_n(t=0)$ abbiamo

$$
\begin{aligned}
\alpha_n(t=0) &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} dx\,\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) A(1-|x|/L) \\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{+L} dx\,\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) A(1-x/L) \\
&= \frac{2}{L}\int_{0}^{+L} dx\,\frac{L}{n\pi}\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) A(1-x/L) \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) A(1-x/L)\right)\Big|_0^L + \frac{2A}{n\pi L}\int_0^{+L} dx\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\
&= -\frac{2A}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_0^L \\
&= \frac{2A}{n^2\pi^2}((-1)^{n+1}+1) \Longrightarrow a_{2k+1} = \frac{4A}{(2k+1)^2\pi^2}\ ,\ a_{2k+2}=0\ ,\ k\geq 0\ .
\end{aligned}
$$

Inoltre $\beta_n(t=0)=0$ perché la condizione iniziale è una funzione pari quindi moltiplicata per un seno ha integrale nullo. Di conseguenza $b_n=0$ per ogni $n\geq 1$. Inoltre dato la condizione iniziale per la derivata prima rispetto al tempo è la funzione nulla, avremo che $\dot\alpha_0(t=0)=0$ e anche $\dot\alpha_n(t=0)=\dot\beta_n(t=0)=0$ per ogni $n\geq 1$, e di conseguenza $\tilde a_0=0$ e $\tilde a_n=\tilde b_n=0$ per ogni $n\geq 1$.

Dunque la soluzione con la condizione iniziale data è esprimibile con la seguente serie di Fourier

$$
u(t,x) = \frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(\omega_{2k+1}t)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right)\ .
$$