

23 Novembre

$$x^a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x^a)^{(n)} = \prod_{j=1}^n (a-j+1) x^{a-n} \quad n \in \mathbb{N}$$

Nel caso particolare  $a = n$

$$\begin{aligned} (x^n)^{(n)} &= \prod_{j=1}^n (n-j+1) x^{\overset{1}{\underset{0}{}}} = \prod_{j=1}^n (n-j+1) = \\ &= n(n-1) \cdots 1 = n! \end{aligned}$$

Esercizio Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definito da  $g(x) = f(x - x_0)$ . Dimostrare  
che se  $f$  ammette ovunque  $f^{(n)}(x)$  allora lo  
stesso è vero per  $g$  e si ha  $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x - x_0)$   
 $\forall x \in \mathbb{R}$ .

---

$(1+x)^a$  che è ottenuta per traslazione di  $x^a$ .  
$$\left( (1+x)^a \right)^{(n)} = \prod_{j=1}^n (a-j+1) (1+x)^{a-n}.$$

Def Sia  $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $x_0 \in (a,b)$ . Supponiamo che esistano  $f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$ . Allora il polinomio di ordine  $n$  di  $f$  rispetto al punto  $x_0$  è il seguente polinomio:

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$
$$= \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j$$

dove  $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ ,  $0! = 1$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j$$

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f' \\ f^{(2)} &= f'' \end{aligned}$$

$$P_0(x) = f(x_0)$$

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$I_n$  generale  $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Osservare che grado  $P_n \leq n$ .

Quando  $x_0 = 0$  i polinomi di Taylor vengono chiamati polinomi di McLaurin.

Esempi (Polinomi di McLaurin)

$$f(x) = e^x$$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!}$$

$$f(x) = e^x$$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!}$$

$$x_0 = 0$$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j =$$

$$f^{(j)}(0) = f(0) = 1$$

$$\left( \text{qvi } f(x) = e^x \right)$$

$$= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} x^j$$

$$f(x) = \sin(x) \quad P_{2m+1}(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

Notare che tutti i monomi presenti esplicitamente, sono di grado dispari. Questo succede perché  $\sin(x)$  è una funzione dispari. Questo è un fatto generale. Tutte le funzioni dispari si comportano nel medesimo modo.

Abbiamo visto che  $\sin^{(2k)}(x)|_{x=0} = (-1)^k \sin x|_{x=0} = 0$

$$\sin^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x)$$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\sin^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ dispari}}}^n \frac{\sin^{(j)}(0)}{j!} x^j$$

Se  $n$  è dispari,  $n = 2N+1$ , osservo che,  $j = 2k+1$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ dispari}}}^n \frac{\sin^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{k=0}^N \frac{\sin^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$



$$\sum_{k=0}^N \frac{\sin^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} =$$

$$\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$$

$$= \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} = P_n(x) = P_{2N+1}(x)$$

$$P_{2N}(x) = ?$$

$$P_0(x) = \sin(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
 P_{2N}(x) &= P_{2N-1}(x) + \frac{\sin^{(2N)}(0)}{(2N)!} x^{2N} = \\
 &= P_{2N-1} = P_{2(N-1)+1} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}
 \end{aligned}$$

$$\text{E}_\Delta \quad P_{10}(x) = P_9(x) = \sum_{j=0}^4 \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$$

$$\sin x \rightsquigarrow P_{2N+1}(x) = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$$

$$\cos(x)$$

$$P_{2N}(x) = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!}$$

$$P_{2N}(x) = \sum_{k=0}^{2N} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{2N} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k =$$

$$\cos^{(2j+1)}(0) = \pm \sin(0) = 0$$

$$k = 2j$$

$$= \sum_{j=0}^N \frac{\cos^{(2j)}(0)}{(2j)!} x^{2j} = \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} \quad \cos^{(2j)}(x) \Big|_{x=0} = (-1)^j \cos(x) \Big|_{x=0} = (-1)^j$$

$\cos x$

$$P_{2N}(x) = \sum_{j=0}^N (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

$$P_0(x) = (-1)^0 \frac{x^0}{0!} = 1 = \cos(0)$$

$$\begin{aligned} P_{2N+1}(x) &= P_{2N}(x) + \frac{\cos^{(2N+1)}(0)}{(2N+1)!} x^{2N+1} \\ &= P_{2N}(x) \end{aligned}$$

$$f(x) = (1+x)^a : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Def Per ogni  $a \in \mathbb{R}$  ritorniamo

$$\binom{a}{0} = 1, \quad \binom{a}{1} = a, \quad \text{per } k \geq 2$$

$$\binom{a}{k} = \frac{\prod_{j=1}^k (a-j+1)}{k!} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$$

Per  $a \in \mathbb{N}$  ritornano gli stessi coefficienti binomiali già definiti

$$a = m \in \mathbb{N}$$

$$\binom{m}{n} = \frac{\prod_{j=1}^n (m-j+1)}{n!} = 0 \quad \text{se } n > m$$

Questo perché  $\prod_{j=1}^n (m-j+1) =$

$$= m(m-1) \dots \dots \dots (m-n+1)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\leq 0}$

Se  $m-n+1=0$  il prodotto è  $=0$ . Se  $(m-n+1) < 0$  allora un altro fattore precedente è  $=0$ .

Si e  $f(x) = (1+x)^a$ . Allora

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^m \binom{a}{j} x^j$$

Nel caso  $a = n$ ,  $f(x) = (1+x)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j = P_n(x)$

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + \sum_{k=1}^m \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (a-j+1)}{k!} x^k$$

$$k \geq 1 \quad f^{(k)}(0) = \left( (1+x)^a \right)^{(k)} \Big|_{x=0} = \prod_{j=1}^k (a-j+1) (1+x)^{a-k} \Big|_{x=0} = \prod_{j=1}^k (a-j+1)$$

$$P_m(x) = 1 + \sum_{k=1}^m \frac{\prod_{j=1}^k (a-j+1)}{k!} x^k = \binom{a}{0} + \sum_{k=1}^m \binom{a}{k} x^k$$
$$= \sum_{k=0}^m \binom{a}{k} x^k .$$



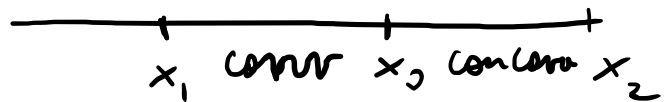
Esercizio Se  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è tale che  $x_0$  è un punto di flesso e se esiste  $f''(x_0)$  si ha  $f''(x_0) = 0$ .  
Suppongo che  $f'(x)$  esista dappertutto.

Dim Dire che  $x_0$  è un punto di flesso significa dire che  $\exists (x_1, x_2) \subset (a, b)$ , con  $x_1 < x_0 < x_2$ ,

t.c. in  $(x_1, x_0)$   $f$  è convessa (risp. concava)

in  $(x_0, x_2)$   $f$  è concava (risp. convessa).

$f$  concava in  $(x_1, x_0)$

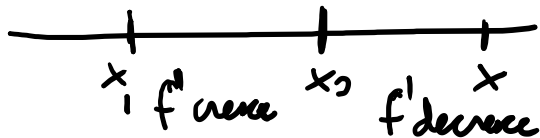


$\Leftrightarrow f'(x)$  è crescente in  $(x_1, x_0) \Leftrightarrow f'(x)$  è crescente in  $(x_1, x_0)$

$f$  convessa in  $(x_0, x_2)$

$\Leftrightarrow f'(x)$  è decrescente in  $(x_0, x_2) \Leftrightarrow f'(x)$  è decrescente in  $[x_0, x_2]$

Pe



$\Rightarrow x_0$  punto di max  
di  $f'$  in  $(x_1, x_2)$   
e per Fermat  $f''(x_0) = 0$ .