23 Novembre

$$x^{a} : \mathbb{R}_{+} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(x^{a}\right)^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} (a-j+1)\, x^{a-n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Nel caso particolare $a = n$

$$\left(x^{n}\right)^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} (n-j+1)\, \overset{1}{\overset{\shortparallel}{x^{0}}} = \prod_{j=1}^{n} (n-j+1) =$$

$$= n\,(n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

<u>Esercizio</u> Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x - x_0)$. Dimostrare che se $f$ ammette ovunque $f^{(n)}(x)$ allora lo stesso è vero per $g$ e si ha $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x - x_0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

---

$(1+x)^a$ che è ottenuta per traslazione di $x^a$.

$$\left((1+x)^a\right)^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} (a-j+1)\ (1+x)^{a-n}.$$

**Def** Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e sia $x_0\in(a,b)$. Supponiamo che esistono $f'(x_0),\dots,f^{(n)}(x_0)$. Allora il polinomio di ordine $n$ di $f$ rispetto al punto $x_0$ è il seguente polinomio:

$$p(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

dove $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$, $0!=1$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j}$$

$$f^{(1)} = f'$$

$$f^{(2)} = f''$$

$$P_0(x) = f(x_0)$$

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

In generale

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Osservare che grado $P_n \leq n$.

Quando $x_0 = 0$ i polinomi di Taylor vengono chiamati polinomi di McLaurin.

**Esempi** (Polinomi di McLaurin)

$f(x) = e^x$ $\qquad$ $$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

$$f(x) = e^x \qquad P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \qquad x_0 = 0$$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j =$$

$$f^{(j)}(0) = f(0) = 1 \qquad (\text{qui } f(x) = e^x)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} x^j$$

$$f(x) = \sin(x) \qquad P_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

Notare che tutti i monomi presenti esplicitamente, sono di grado dispari. Questo succede perchè $\sin(x)$ è una funzione dispari. Questo è un fatto generale. Tutte le funzioni dispari si comportano nel medesimo modo.

Abbiamo visto che $\sin^{(2k)}(x)\big|_{x=0} = (-1)^k \sin x\big|_{x=0} = 0$

$$\sin^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x)$$

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\sin^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ dispari}}}^{n} \frac{\sin^{(j)}(0)}{j!} x^j$$

Se $n$ è dispari, $n = 2N+1$, osservo che, $j = 2k+1$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ dispari}}}^{n} \frac{\sin^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{k=0}^{N} \frac{\sin^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\sin^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} =$$

$$\sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} = P_n(x) = P_{2N+1}(x)$$

$$P_{2N}(x) = ?$$

$$P_0(x) = \sin(0) = 0$$

$$P_{2N}(x) = P_{2N-1}(x) + \frac{\sin^{(2N)}(0)}{(2N)!} x^{2N} =$$

$$= P_{2N-1} = P_{2(N-1)+1}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}.$$

Es $$P_{10}(x) = P_9(x) = \sum_{j=0}^{4} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$$

$$\sin x \rightsquigarrow P_{2N+1}(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$$

$\cos(x)$

$$P_{2N}(x) = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

$$P_{2N}(x) = \sum_{k=0}^{2N} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pari}}}^{2N} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k =$$

$$\cos^{(2j+1)}(0) = \pm \sin(0) = 0 \qquad k = 2j$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \frac{\cos^{(2j)}(0)}{(2j)!} x^{2j} = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \qquad \cos^{(2j)}(x)\Big|_{x=0} = (-1)^j \cos(x)\Big|_{x=0} = (-1)^j$$

$\cos x$

$$P_{2N}(x) = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

$$P_0(x) = (-1)^0 \frac{x^0}{0!} = 1 = \cos(0)$$

$$P_{2N+1}(x) = P_{2N}(x) + \frac{\cos^{(2N+1)}(0)}{(2N+1)!} x^{2N+1}$$

$$= P_{2N}(x)$$

$f(x) = (1+x)^a : (-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

<u>Def</u> Per ogni $a \in \mathbb{R}$ scriviamo

$$\binom{a}{0} = 1 \quad , \quad \binom{a}{1} = a \quad , \quad \text{per } k \geq 2$$

$$\binom{a}{k} = \frac{\prod_{j=1}^{k} (a-j+1)}{k!} = \frac{a\,(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$$

Per $a \in \mathbb{N}$ ritroviamo gli stessi coefficienti binomiali già definiti

$a = m \in \mathbb{N}$

$$\binom{m}{n} = \frac{\prod_{j=1}^{n} (m-j+1)}{n!} = 0 \quad \text{se } n > m$$

questo perchè $\prod_{j=1}^{n} (m-j+1) =$

$$= m(m-1) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (\underbrace{m-n+1}_{\leq 0})$$

Se $m-n+1=0$ il prodotto è $=0$. Se $(m-n+1)<0$ allora un altro fattore precedente è $=0$.

Sia $f(x) = (1+x)^a$. Allora

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{a}{j} x^j$$

Nel caso $a = n$, $f(x) = (1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j = P_n(x)$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \overset{\overset{1}{\parallel}}{f(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{k} (a-j+1)}{k!} x^k$$

$$k \geq 1 \quad f^{(k)}(0) = \left( (1+x)^a \right)^{(k)} \Big|_{x=0} = \prod_{j=1}^{k} (a-j+1)(1+x)^{a-k} \Big|_{x=0} = \prod_{j=1}^{k} (a-j+1)$$

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{k}(a-j+1)}{k!} x^k = \binom{a}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{a}{k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k .$$

Esercizio Se $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ è tale che $x_0$ e' un punto di flesso e se esiste $f''(x_0)$ si ha $f''(x_0) = 0$.
Suppongo che $f'(x)$ esiste dappertutto.

Dim Dire che $x_0$ è un punto di flesso significa dire che $\exists\ (x_1, x_2) \subseteq (a,b)$, con $x_1 < x_0 < x_2$,

t.c. in $(x_1, x_0)$ $f$ è convessa (risp. concava)

in $(x_0, x_2)$ $f$ è concava (risp. convessa).

$x_1$ conv $x_0$ concava $x_2$

f convessa in $(x_1, x_0)$

$\iff f'(x)$ è crescente in $(x_1, x_0) \iff f'(x)$ è crescente in $(x_1, x_0]$

f concava in $(x_0, x_2)$

$\iff f'(x)$ è decrescente in $(x_0, x_2) \iff f'(x)$ è decrescente in $[x_0, x_2)$

Pe

$x_1$ $f'$ cresce $x_0$ $f'$ decresce $x$

$\Rightarrow x_0$ punto di max di $f'$ in $(x_1, x_2)$

e per Fermat $f''(x_0) = 0$.