PERMUTAZIONI

$X_n = \{1, 2, \dots, n\}$

$\varphi : X_n \longrightarrow X_n$ funzione biettiva è detta **permutazione** di $\{1, \dots, n\}$

$\Sigma_n = \{ \varphi : X_n \to X_n \mid \varphi \text{ biettiva} \}$

gruppo delle permutazioni di n elementi, detto anche gruppo simmetrico

$\varphi, \psi \in \Sigma_n \rightsquigarrow \varphi \circ \psi : X_n \to X_n$

$\varphi \circ \psi \in \Sigma_n$

$id_{X_n} =: 1 \in \Sigma_n$

$\varphi \in \Sigma_n \longrightarrow \varphi^{-1} \in \Sigma_n$

Dato che la composizione è associativa segue che Σ_n è gruppo

$$\varphi \circ (\psi \circ \gamma) = (\varphi \circ \psi) \circ \gamma \quad \forall\, \varphi, \psi, \gamma \in \Sigma_n$$

$\sigma \in \Sigma_n \rightsquigarrow \sigma : \{1, \dots, n\} \xrightarrow[\text{biiettiva}]{} \{1, \dots, n\}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$ notazione per le permutazioni

Esempi

$\Sigma_1 = \{ \text{biiezioni di } X_1 \} = \{ 1 \doteq id_{X_1} \} =$ gruppo banale | $X_1 = \{1\}$

$\Sigma_2 = \{ 1, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \} \cong \mathbb{Z}_2$ $\sigma : \{1, 2\} \longrightarrow \{1, 2\} = X_2$

$\underset{+}{\mathbb{Z}_2} \underset{\text{ISO}}{\overset{\cong}{\longrightarrow}} \underset{\circ}{\Sigma_2}$ $[0] \mapsto 1$

$[1] \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \Sigma_4 \quad , \quad \boxed{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}} \in \Sigma_4$$

$$\underline{\underset{2^\circ}{\sigma} \circ \underset{1^\circ}{\tau}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\tau \circ \sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \neq \sigma \circ \tau \implies \Sigma_4$$ <u>non è abeliano</u>

Σ_n non abeliano per $n \geq 3$

Σ_1, Σ_2 <u>abeliani</u>

$o(\Sigma_n) = \# \Sigma_n$

ordine di Σ_n

Prop $\boxed{o(\Sigma_n) = n! := n \cdot (n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}$

Esempi

$o(\Sigma_1) = 1! = 1$, $o(\Sigma_2) = 2! = 2$, $o(\Sigma_3) = 3! = 3 \cdot 2 = 6$

$o(\Sigma_4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, $o(\Sigma_5) = 5! = 120$, $o(\Sigma_6) = 720$, ...

Dim $\sigma \in \Sigma_n \rightsquigarrow \sigma : \{1, 2, 3, 4, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$

$\sigma(1) \rightsquigarrow n$ scelte

$\sigma(2) \rightsquigarrow (n-1)$ scelte

$\sigma(3) \rightsquigarrow (n-2)$ scelte

$\vdots$

$\sigma(n) \rightsquigarrow 1$ scelta

$\rightarrow$ $n(n-1)$ possibilità per $\sigma(1)$ e $\sigma(2)$

$\rightsquigarrow$ $n(n-1)(n-2)$ possibilità per $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)$

$\rightsquigarrow$ $\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 1}_{} = n!$ possibilità per σ

Def Un k-ciclo in Σ_n, $1 \leq k \leq n$, è una permutazione del tipo

(k è detta lunghezza del ciclo)

$$\begin{cases} i_1 \overset{\sigma}{\longmapsto} i_2 \\ i_2 \overset{\sigma}{\longmapsto} i_3 \\ i_3 \overset{\sigma}{\longmapsto} i_4 \\ \vdots \\ i_{k-1} \overset{\sigma}{\longmapsto} i_k \\ i_k \overset{\sigma}{\longmapsto} i_1 \\ j \longmapsto j \quad \forall j \in X_n - \{i_1, \dots, i_k\} \end{cases}$$

per certi $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$

a due a due distinti

$i_r \neq i_s \quad \forall r \neq s$

Un tale k-ciclo si denota con $(i_1 \; i_2 \; \dots \; i_k) \in \Sigma_n$

Un 2-ciclo è detto trasposizione $(i \; j)$

Esempio • in Σ_2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2)$ elemento non banale di Σ_2

(trasposizione)

• $\Sigma_3 = \{1, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

OSS Un ciclo di lunghezza 1 (1-ciclo) è l'identità.
Per questa ragione non si considerano 1-cicli

• Σ_4 contiene anche permutazioni che non sono cicli
($\Sigma_{n \geq 4}$)

$$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}} = \underline{(1\ 2)\ (3\ 4)} = (3\ 4)\ (1\ 2)$$

Def Due cicli $\sigma = (i_1 \dots i_k)$ e $\tau = (j_1 \dots j_h) \in \Sigma_n$

sono detti **disgiunti** se $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_h\} = \phi$

Fatto Se σ e $\tau \in \Sigma_n$ sono cicli disgiunti allora **commutano**:

$$\boxed{\sigma \tau = \tau \sigma}$$

Es $(1\ 2\ 3), (5\ 6) \in \Sigma_6$

$$(1\ 2\ 3)(5\ 6) = (5\ 6)(1\ 2\ 3)$$

Fattorizzazione in cicli disgiunti

Prop. Sia $\sigma \in \Sigma_n$. Allora $\exists$ cicli $\tau_1, \dots, \tau_s \in \Sigma_n$ disgiunti, t.c.

$$\boxed{\sigma = \tau_1 \cdots \tau_s}$$

Inoltre questa fattorizzazione è unica a meno dell'ordine

Dim Per induzione su n

1) $n = 1$ ovvio

2) Supponiamo che sia vero per ogni $k \leq n-1$, con $n \geq 2$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots i_1 \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 \ \sigma(i_1) \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

$1 \longrightarrow i_1 \longrightarrow \sigma(i_1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow j \longrightarrow 1$

$\tau_1 = (1 \ i_1 \ \sigma(i_1) \ \cdots \ j)$ r-ciclo $r \geq 1$

$i_k = \sigma(k)$

$\sigma' = \tau_1^{-1} \sigma$ lascia fermo $\{1, i_1, \dots, j\}$ $\rightsquigarrow$ $\sigma' \in \Sigma_{n-r}$

Ipotesi induttiva $\quad \sigma' = \underline{\tau_2 \cdots \tau_s} \quad \tau_j$ cicli disgiunti in Σ_{n-2}

$$\Longrightarrow \quad \sigma' = \tau_1^{-1}\sigma = \underline{\tau_2 \cdots \tau_s}$$

$$\Longrightarrow \sigma = \underline{\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s} \quad \text{\underline{cicli disgiunti}}$$

<u>Esempio</u>

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & & & \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_5$$

$$\sigma = (1\ 5)(2\ 3\ 4) = (2\ 3\ 4)(1\ 5)$$

Esempio

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = (1\ 6\ 5\ 2\ 4\ 3)$$ 6 - ciclo

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\psi = (1\ 3)(2\ 4\ 5\ 6)$$

$\underline{Es}$ (prodotto di cicli non disgiunti)

$$\underbrace{(1\ 2\ 3)}_{2^a}\ \underbrace{(3\ 4)}_{1^a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \underline{(1\ 2\ 3\ 4)}$$

Prop Ogni permutazione è prodotto di trasposizioni (in generale non disgiunte) e non in modo unico.

Dim Basta dimostrarlo per i cicli:

$$i_3 \leftarrow i_1$$

$$(i_1\ i_3) \quad i_1 \leftarrow i_2$$

$$\underset{k\text{-ciclo}}{(i_1\ i_2\ i_3\ \dots\ i_k)} = (i_1\ i_k)\ \underline{(i_1\ i_{k-1})\ (i_1\ i_{k-2})\ \cdots\ (i_1\ i_2)}$$

Se $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ rimane fisso.