

24 Novembre

Lemma Siano $a_0, a_1, \dots, a_n$ dei numeri reali.

Allora esiste un unico polinomio $P(x)$ di grado $\leq n$ t.c. $P^{(k)}(0) = a_k \quad \forall k=0, \dots, n.$

ed e' dato

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} x^k.$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} x^k \quad \text{ha grado } \leq n. \quad \text{Per } m$$

$$0 \leq m \leq n$$

$$P^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (x^k)^{(m)} = \sum_{k=m}^n \frac{a_k}{k!} (x^k)^{(m)} =$$

$$\left(\text{perché se } m > k \text{ ho } (x^k)^{(m)} = 0 \right)$$

$$= \frac{a_m}{m!} (x^m)^{(m)} + \sum_{k=m+1}^n \frac{a_k}{k!} (x^k)^{(m)}$$

$$(x^m)^{(m)} = m!$$

Ver. f. che un polinomio è l'unico polinomio possibile, $p = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} x^k$

$$\text{Sia } q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k = \sum_{k=0}^n \frac{(k! \cdot b_k)}{k!} x^k$$

$$q^{(k)}(0) = (k! \cdot b_k) \text{ per ogni } k=0, \dots, n$$

allora $k! \cdot b_k = a_k$

$$\text{Se } q^{(k)}(0) = a_k$$

$$\forall k=0, \dots, n$$

$$\forall k=0, \dots, n \quad b_k = \frac{a_k}{k!}$$

Lemma Siano $a_0, \dots, a_n$ dei numeri reali e sia $x_0 \in \mathbb{R}$, allora esiste un polinomio P di grado $\leq n$ t.c. $P^{(k)}(x_0) = a_k \quad \forall k = 0, \dots, n$

ed è dato da

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} (x - x_0)^k.$$

Osservazione Dati $f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$
 $a''_0, a''_1, \dots, a''_n$

allora il polinomio allora l'unico polinomio P
di grado $\leq n$ tale che $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ per $k=0, \dots, n$

è esattamente il polinomio di Taylor di
ordine n

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Teor (Lagrange) Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. Supponiamo che $f^{(n+1)}(x)$ esista $\forall x \in (a,b)$. Consideriamo il polinomio di Taylor di ordine n rispetto a x_0 , che denoto con $P_n(x)$.

Poniamo $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, cioè $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

Allora se $R_n(x_0) = 0$ mentre per $x \neq x_0$ si ha

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{nx})}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

dove c_{nx} è un opportuno punto tra x e x_0 .

Osservazione. Per $n=1$

$$R_0(x) = f(x) - P_0(x) = f(x) - f(x_0) = f'(c_{0,x}) (x - x_0)$$

con $c_{0,x}$ all'interno dell'intervallo di estremi

x e x_0 .

$$f'(c_{0,x}) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dim $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ e vogliamo

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{ox})}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

Ricordiamo Cauchy:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c_{ox})}{G'(c_{ox})}$$

per un c_{ox} intermedio tra x e x_0

$$F(x) = R_n(x)$$

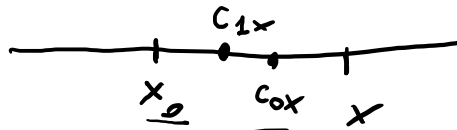
$$R_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(x_0) = 0$$

per ogni $k = 0, \dots, n$.

$$G(x) = (x-x_0)^{n+1}$$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{R_m(x) - R_m(x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_m(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{F'(c_{0x})}{G'(c_{0x})} =$$

$$= \frac{R'_m(c_{0x})}{(n+1)(c_{0x} - x_0)^n} =$$

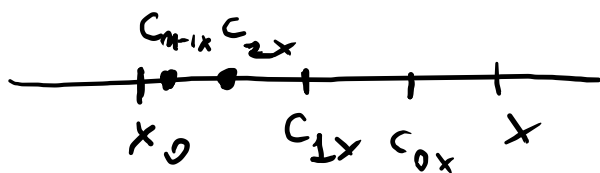


Risultato Cauchy

$$= \frac{R'_m(c_{0x}) - R'_m(x_0)}{(n+1)(c_{0x} - x_0)^n - 0} = \frac{R''_m(c_{1x})}{(n+1)n(c_{1x} - x_0)^{n-1}} = \frac{R''_m(c_{1x}) - R''_m(x_0)}{(n+1)n(c_{1x} - x_0)^{n-1} - 0}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{R_n''(c_{1x}) - R_n''(x_0)}{(n+1)n(c_{1x} - x_0)^{n-1}} = \\
 & = \frac{R_n^{(3)}(c_{2x})}{(n+1)n(n-1)(c_{2x} - x_0)^{n-2}} = \frac{R_n^{(3)}(c_{2x})}{[(x - x_0)^{n+1}]^{(3)}(c_{2x})} \\
 & = \dots = \frac{R_n^{(n)}(c_{n-1x})}{[(x - x_0)^{n+1}]^{(n)}(c_{n-1x})} = \frac{R_n^{(n)}(c_{n-1x})}{(n+1)! (c_{n-1x} - x_0)}
 \end{aligned}$$

$x_0 < c_{n-1x} < c_{n-2x} < \dots < c_{2x} < c_{1x} < c_{0x} < x$

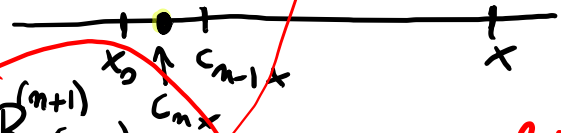


$$\frac{R_n^{(n)}(c_{n-1,x})}{(n+1)! (c_{n-1,x} - x_0)} = \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} \quad *$$

Abbiamo dimostrato che esiste un $c_{n-1,x}$ tra x_0 e x
 t.c. vale la *,

$$\frac{R_n^{(n)}(c_{n-1,x}) - R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)! (c_{n-1,x} - x_0) - 0} = \frac{R_n^{(n+1)}(c_{n,x})}{(n+1)!}$$

Sono uguali



Abbiamo dimostrato che esiste

t.c. $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(c_{nx})}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c_{nx}) - \cancel{P_n^{(n+1)}(c_{nx})}}{(n+1)!}$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c_{nx})}{(n+1)!}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{nx})}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad \text{dove}$$

c_{nx} sta tra x_0 e x .

Esempio Approssimare e con un numero razionale
facendo un errore $< \frac{1}{10^3}$

$$e^x$$

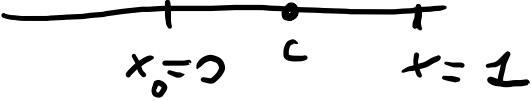
$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!}$$

$$e = e^1$$

$$P_n(1) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \in \mathbb{Q}$$

$$\text{errore}_n = |e - P_n(1)| = |R_n(1)|$$

$$\text{error}_n = |e - p_n(1)| = |R_n(1)| = R_n(1)$$

$$R_n(1) = \frac{(e^x)^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (1-0)^{n+1}$$


$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \quad \text{dove } 0 < c < 1$$

$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$$

$3000 < (n+1)!$

$$(n+1)! > 3000$$

$$n=1 \quad 2$$

$$n=2 \quad 6$$

$$n=3 \quad 24$$

$$n=4 \quad 120$$

$$n=5 \quad 720$$

$n=6 \quad 5040$

$$p^{(m)}(x) \Big|_{x=0} = a_m + \sum_{k=m+1}^n \frac{a_k}{k!} (x^k)^{(m)} \Big|_{x=0} = a_m$$

Vogliamo dimostrare che $p^{(m)}(0) = a_m$

Questo sarà una conseguenza di

$$(x^k)^{(m)} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{se} \quad k > m$$

$$(x^k)^{(m)} \Big|_{x=0} = \prod_{j=1}^m (k-j+1) x^{\overbrace{k-m}^{ \in \mathbb{N} \text{ per } k \geq m }} \Big|_{x=0} = \prod_{j=1}^m (k-j+1) \underbrace{0^{k-m}}_0 = 0$$