f	$\frac{d}{dx} f = f'(x)$
$f \mp g$	$(f \mp g)' = f' \mp g'$
kf $\quad k \in \mathbb{R}$	$(kf)' = k \cdot f'$
$(f \cdot g)$	$(f \cdot g)' = f'g + fg'$ (REGOLA di LEIBNIZ)
$\frac{1}{f}$	$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$
f/g	$\left(f/g\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(\frac{1}{g} \cdot f\right)' = \frac{-g'}{g^2} \cdot f + \frac{f'}{g} = \frac{gf' - g'f}{g^2}}$$

Esempi di derivate di funzioni elementari

f	f'	
x^n	$n x^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	
$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$	$\frac{\cos^2 x - (-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} =$	

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \underbrace{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}_{}$$

$$1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

Estendiamo al caso x^m $m \in \mathbb{Z}$
il calcolo della derivata

Allora se $m \geq 0$ $(m \in \mathbb{N})$ ok ✓

Se $\underbrace{m<0}_{\Downarrow}$ $\underline{(-m>0)}$

$$x^m = \frac{1}{x^{-m}} \qquad \frac{d}{dx} x^m = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^{-m}}\right) = - \frac{(-m) \cdot x^{-m-1}}{(x^{-m})^2} = \frac{m\ x^{-m-1}}{x^{-2m}} = \underline{m x^{m-1}}$$

APPLICANDO LA FORMULA

$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$ con $f(x) = \underline{x^{-m}}$ $(-m>0)$

Calcoliamo ora il limite del rapporto incrementale della funzione esponenziale di base e cioè di $f(x) = e^x$ in x_0.

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \to 0} e^{x_0} \boxed{\left(\frac{e^h - 1}{h}\right)}$$

$$= e^{x_0} \text{ in quanto}$$

LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x}$$

Prop Sia f derivabile in x_0

Sia g una funzione derivabile in $f(x_0) = y_0$.

Allora, la funzione $g \circ f$ è derivabile in x_0

e risulta

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x_0) = \underbrace{g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}_{\textbf{Chain rule}}$$

$$= (g \circ f)'(x_0)$$

Dim

$$\lim_{h\to 0} \frac{(g\circ f)(x_0+h) - (g\circ f)(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(\overset{y}{\overset{\shortparallel}{f(x)}}) - g(\overset{y_0}{\overset{\shortparallel}{f(x_0)}})}{x-x_0}$$

$f(x_0) = y_0 \qquad f(x) = y$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{y - y_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

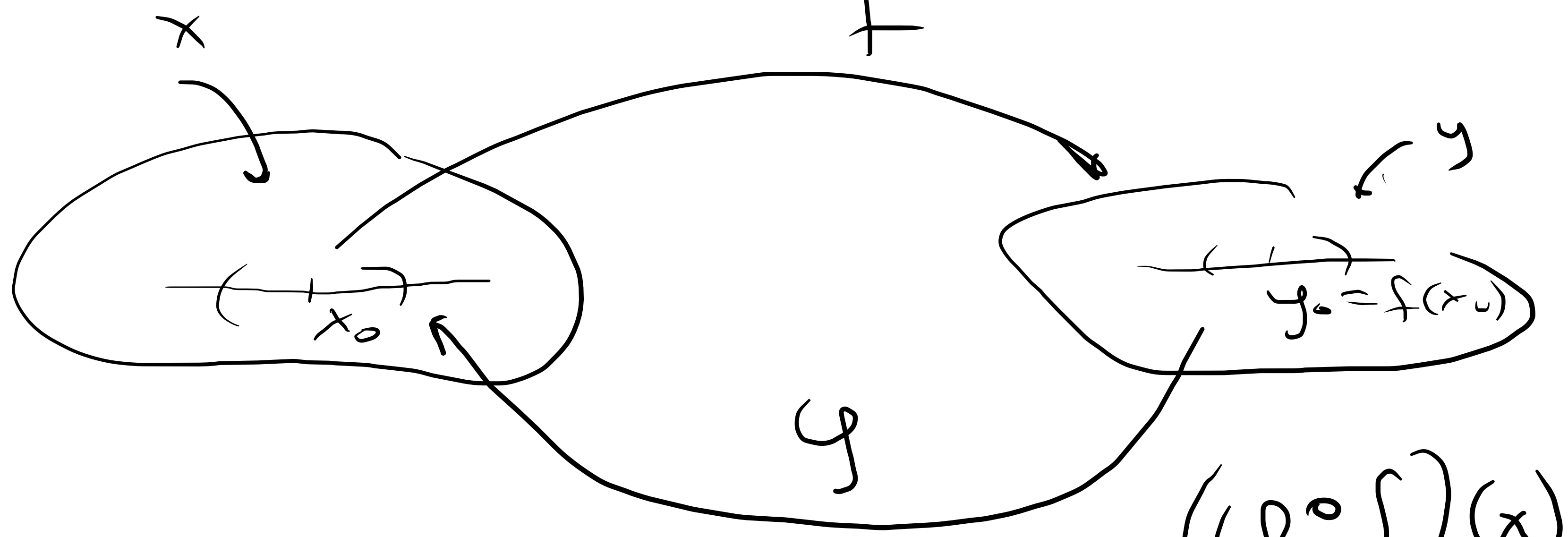
$y = f(x)$ $\quad$ $y_0 = f(x_0)$ $\Longrightarrow$ essendo f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ e' continua in x_0, pertanto

$$\lim_{x \to x_0} \underbrace{f(x)}_{y} - \underbrace{f(x_0)}_{y_0} = 0$$

$\square$

Supponiamo f derivabile in x_0 e f invertibile (in un intorno di x_0). Sia $\boxed{f'(x_0) \neq 0}$

Indichiamo con φ l'inversa locale di f.



$$\boxed{\varphi \circ f = Id_X}$$

$$f \circ \varphi = Id_Y$$

$$(\varphi \circ f)(x) = x \quad \forall x \text{ opportuno}$$

$$(f \circ \varphi)(y) = y$$

Dalla formula della derivata della composta segue che

$$\boxed{\varphi'(f(x)) \cdot f'(x) = 1}$$

$$\frac{d}{dx}(\varphi \circ f)(x) = \frac{d}{dx}x = 1$$

$$\varphi'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1 \overset{f'(x_0) \neq 0}{\Longrightarrow} \boxed{\varphi'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

Ossia

$$\boxed{\varphi'(y) = \frac{1}{f'(\varphi(y))}}$$

$y = f(x) \qquad \varphi(y) = x$

$$\varphi(y) = \varphi(f(x))$$

$\boxed{\varphi \text{ è l'inversa locale di } f}$

Applicazioni

- Calcoliamo la derivata della funzione arctg (inversa di tg in $(-\pi/2, \pi/2)$)

$$\arctan'(y) = \frac{1}{tg'(\arctan(y))} = \frac{1}{1+tg^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\boxed{tg' = 1+tg^2}$$

- $\text{arcsen}'(y) = ?$ $\qquad = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

(arcsen è l'inversa di sen nell'intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$)

Ricordiamo che

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

- $\text{arccos}'(y) = ?$ $\qquad = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

Infine calcoliamo

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{\left(\frac{d}{dx}e^{y}\right)_{y=\ln x}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}}$$

Vediamo di trovare l'espressione della derivata della funzione $x \longmapsto x^{\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$(x > 0)$

$$x = e^{\ln x}$$

$$\Downarrow$$

$$x^{\alpha} = \left(e^{\ln x}\right)^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$$

$$\frac{d}{dx}\alpha \ln x)$$
$$\parallel$$

Chain rule

$$\frac{d}{dx} x^{\alpha} = \frac{d}{dx} e^{\alpha \ln x} = \underbrace{e^{\alpha \ln x}}_{g(y) = e^{y} \quad f(x) = \alpha \ln x} \cdot \left(\alpha \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\alpha}_{\alpha \cdot \frac{1}{x}}$$

$$= \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

Conseguenze

$$\alpha = 1/2$$

$$x^{\alpha} = x^{1/2} = \sqrt{x}$$

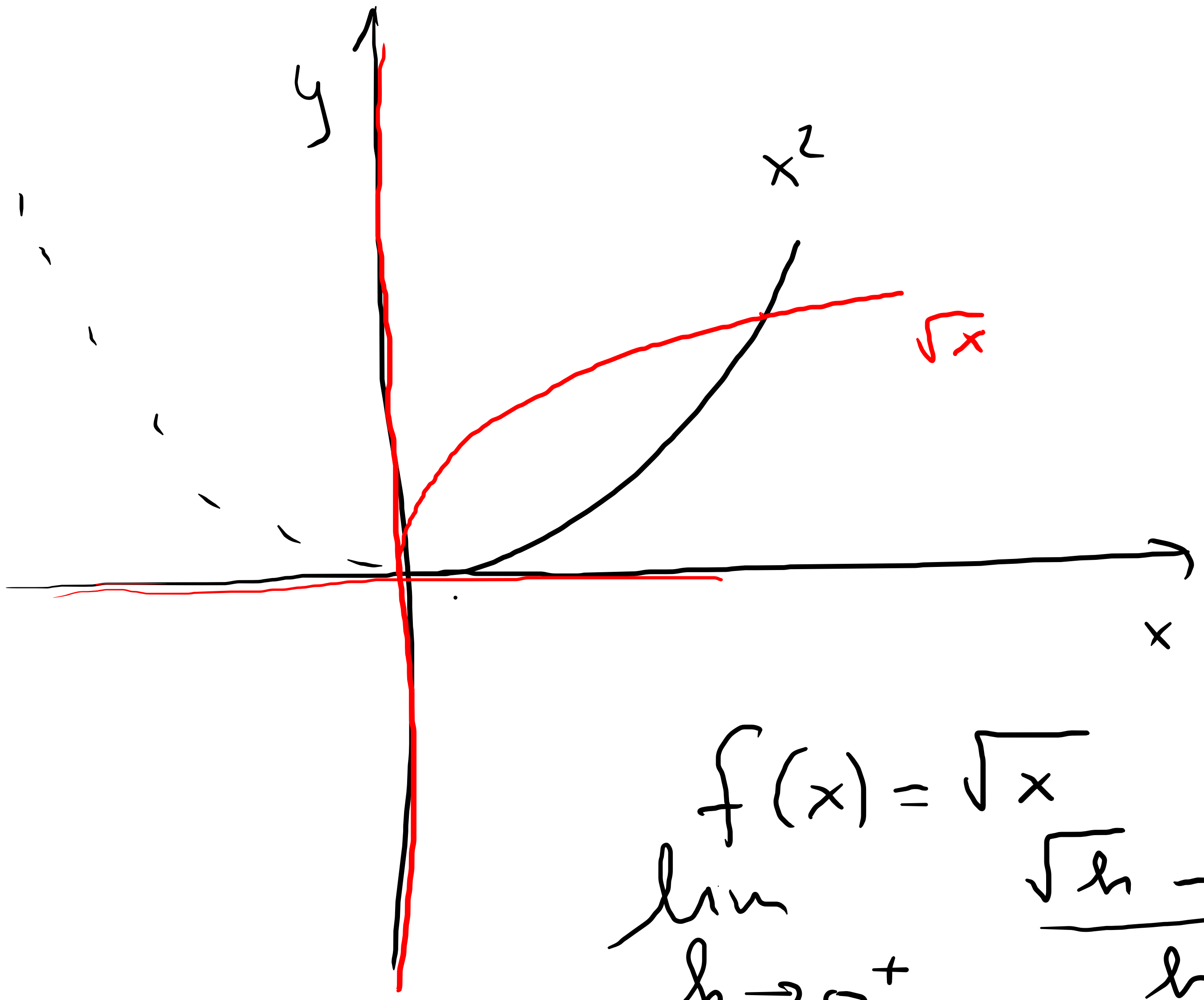
(funzione ben definita e continua $\forall x \geq 0$)

$$\frac{d}{dx} \cdot \sqrt{x} = \frac{d}{dx} x^{1/2} = 1/2 \cdot x^{1/2 - 1} = 1/2 \, x^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

che è definita solo per

$\underline{\underline{x > 0}}$.



$$f(x) = \sqrt{x} \qquad x_0 = 0$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

rapporto incrementale destro di $\sqrt{\ }$ in $x_0 = 0$

Restano ancora da considerare

$\frac{d}{dx} a^x$ $\quad 0 < a \quad$ $\boxed{a \neq 1}$

$\frac{d}{dx} \log_a x = \ldots\ldots$?

Tuttavia $\quad a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a}$

$a = e^{\ln a}$

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \cdot \frac{d}{dx}(x \cdot \ln a)$$

$$= \underline{\underline{\ln a}}\ a^x$$

Riprendiamo l'esercizio

"Studio di funzione"

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}}$$

$\mathrm{Dom}\, f = (-\infty, 0) \cup [+1, +\infty)$

$f(x) \geq 0$ ove definita $\boxed{f(1) = 0}$

f è composta $\sqrt{}$ $\frac{x^3-1}{x}$; calcola

f'

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{x^3-1}{x} \right)^{1/2} =$$

$$-1/2 = 1/2 - 1$$

Chain rule

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^3-1}{x} \right)^{-1/2} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3-1}{x} \right)}$$

$$= 1/2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}} \cdot \frac{3x^2 \cdot x - 1 \cdot (x^3-1)}{x^2} = 1/2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}} \cdot \frac{2x^3+1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}}\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)$$

ha senso se $\boxed{x \neq 1}$ e se $x \in \mathrm{Dom}\, f$

$$\cap$$

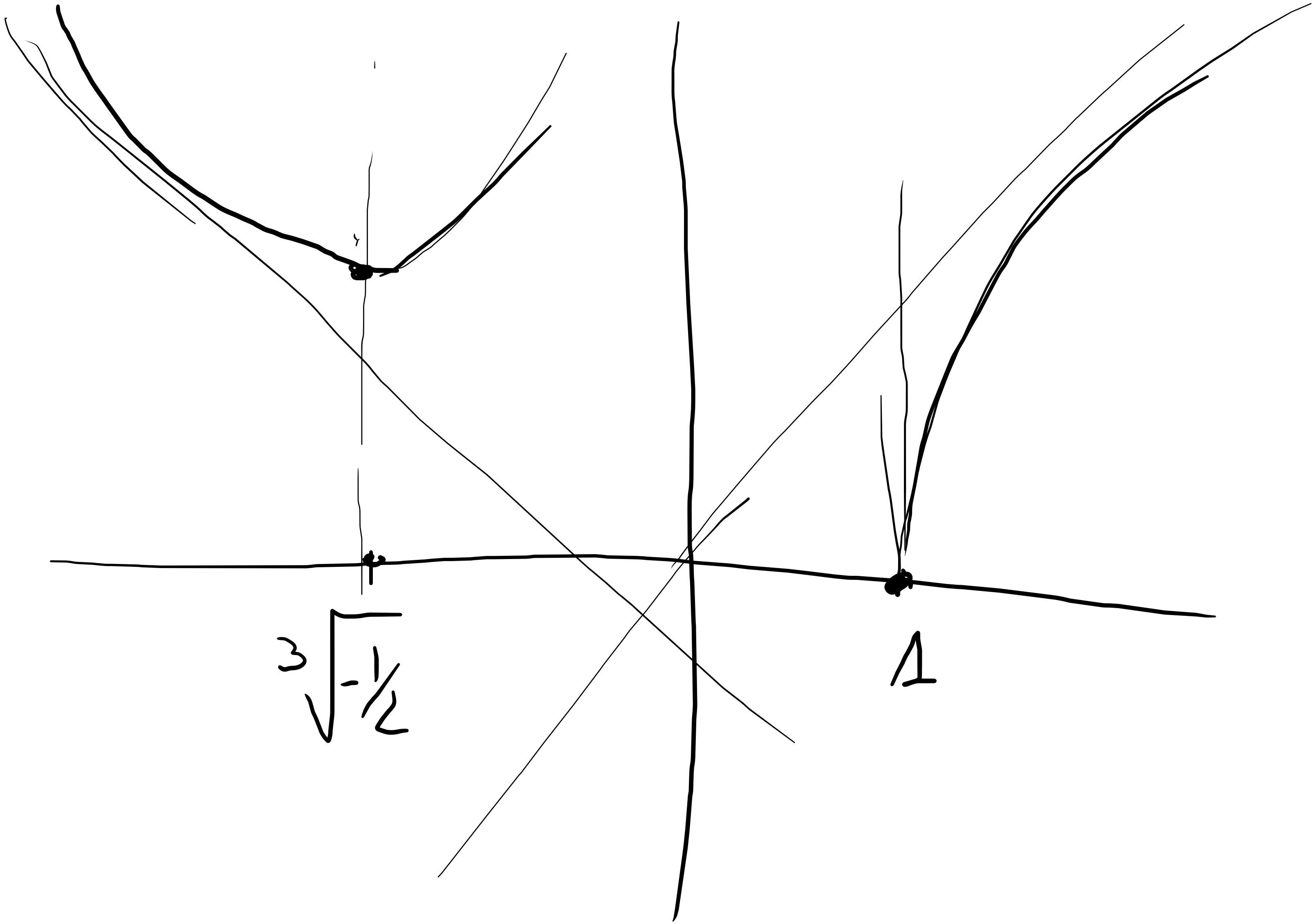
$$(-\infty, 0) \cup [+1, +\infty)$$

$$\mathrm{Dom}\, f' = (-\infty, 0) \cup (+1, +\infty)$$

$$f'(x) > 0 \iff \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) > 0 \iff \frac{2x^3+1}{x^2} > 0 \iff$$

$$2x^3 + 1 > 0 \iff$$

$$x > \sqrt[3]{-1/2}$$



$|x|$ ho in 0 un minimo assoluto