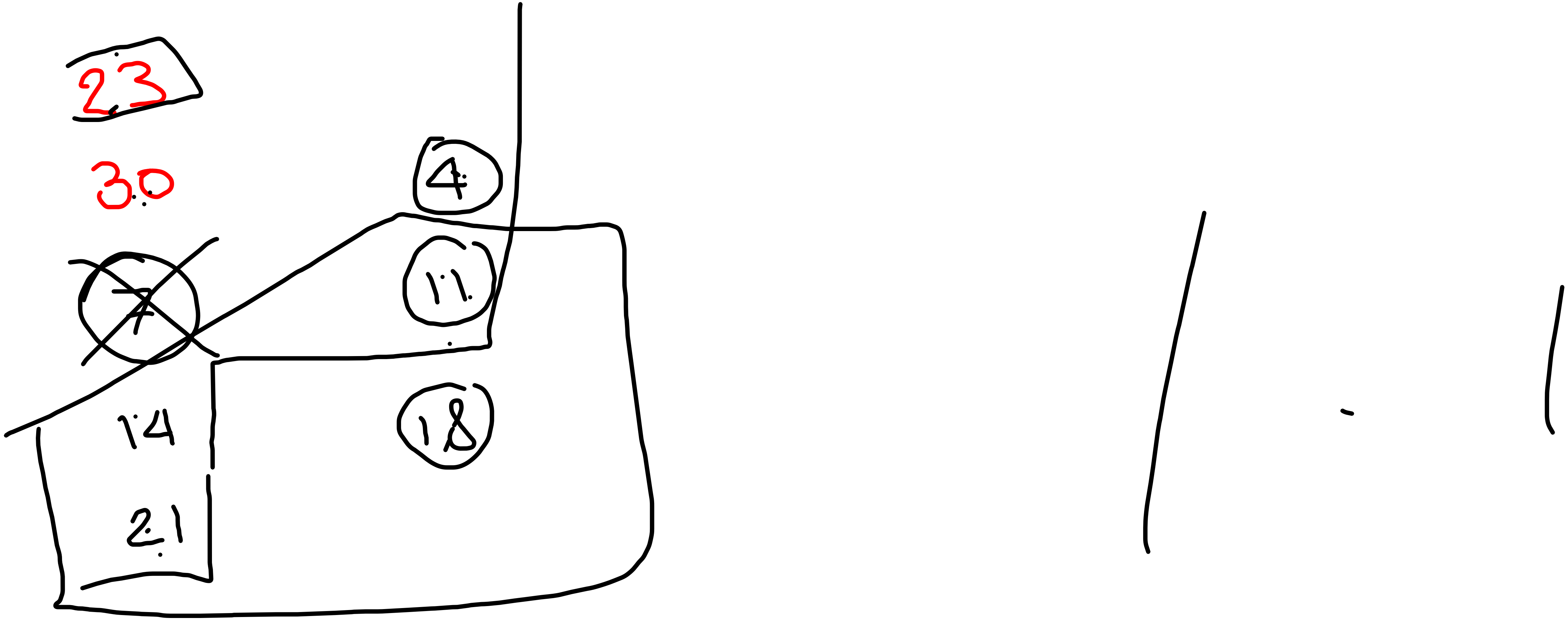
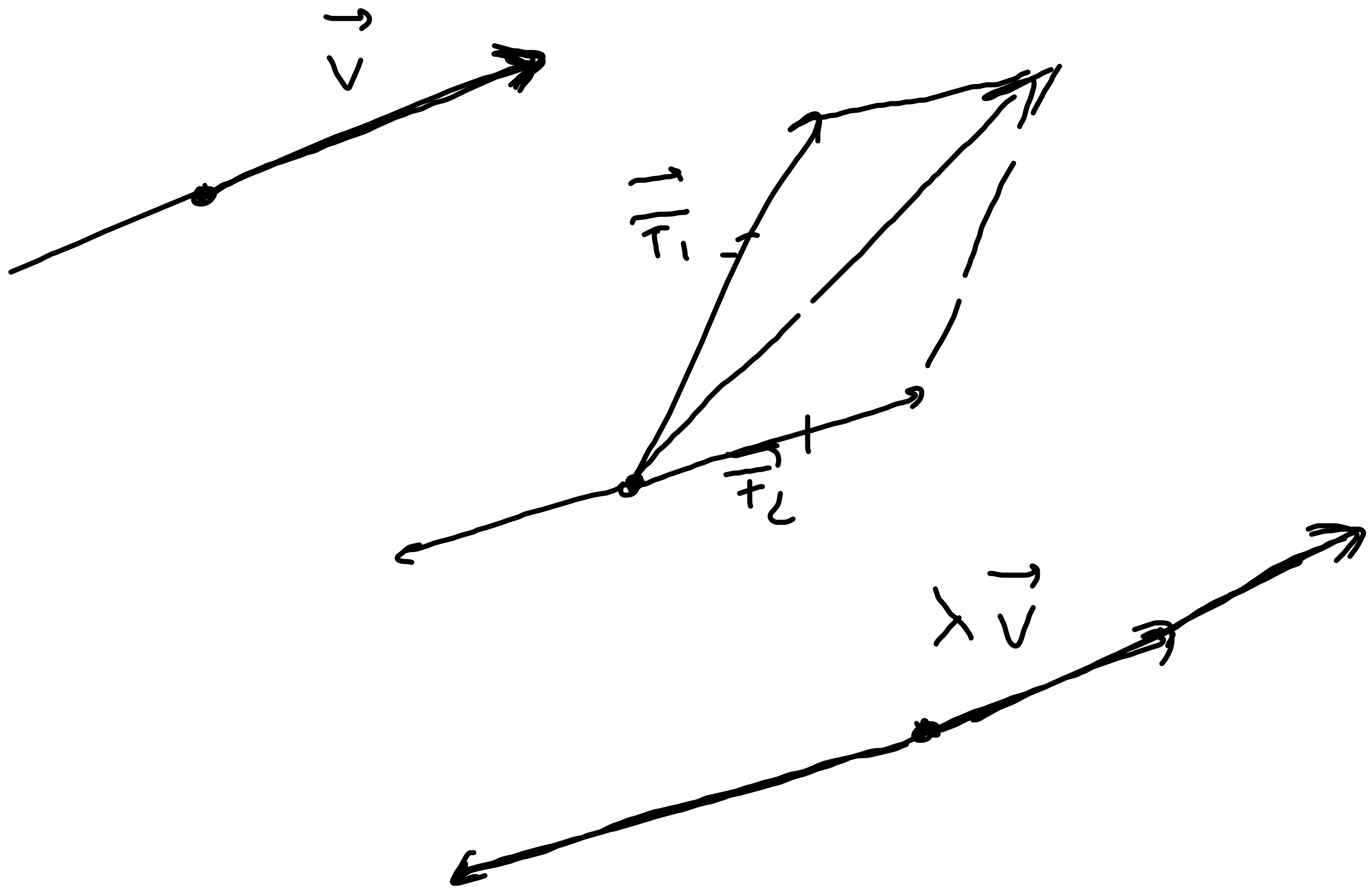


23
30
7
4
11
14
18
21



$\vec{v}$
$\vec{r}_1$
$\vec{r}_2$
$\lambda \vec{v}$

Si dice che un insieme V è uno SPAZIO VETTORIALE reale (e gli elementi di V si diranno VETTORI) se in V è definita una somma (SOMMA VETTORIALE)

$$+ : V \times V \to V$$
$$(v, w) \mapsto v+w$$

tale che

$v+w = w+v$ prop. commutativa $\forall v, w, z \in V$

$(v+w)+z = v+(w+z)$ prop. associativa

$\exists\, 0 \in V$ $\quad 0+v = v+0 = v$

$\forall\, v \in V$ $\quad \exists\, (-v) \in V$ tale che $\quad v+(-v) = (-v)+v = 0$

ed è inoltre definita una moltiplicazione che a un numero reale λ e a un vettore $v \in V$ associa il vettore di V

$\lambda \cdot v$ con

le seguenti proprietà.

1) $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 v) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v$

in $\mathbb{R}$

2) $(\lambda + \mu) v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

in $\mathbb{R}$ in V

3) $1 \cdot v = v$

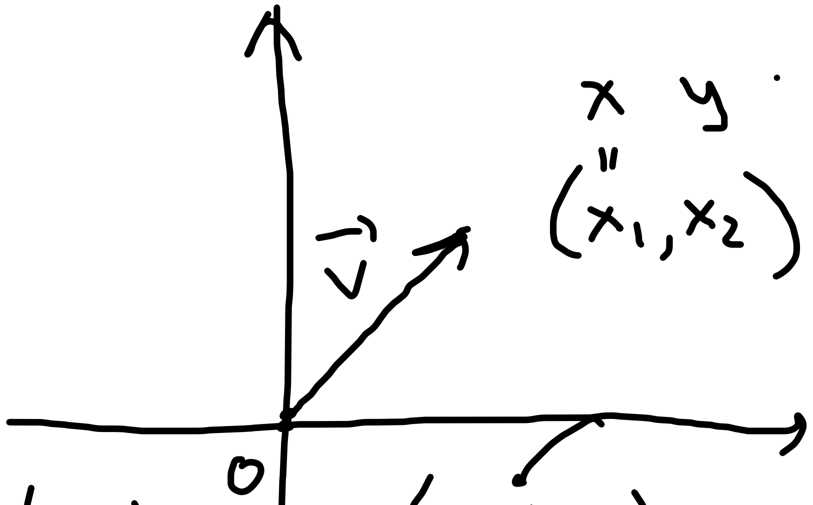
4) $\lambda (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda w$

in V in V

Esempi

Consideriamo $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-volte}} = \left\{ \underline{(x_1, \dots, x_n)} \cdot x_j \in \mathbb{R} \right\}$

$n = 2 \qquad n = 3$



$x \ y \cdot$

$= (x_1, x_2)$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{v}$

Definiamo $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} +_{\mathbb{R}^n} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{0} \in \mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}$

Dalla prop. associativa, commutativa e distributiva del prodotto in $\mathbb{R}$ si verificano le prop. 1) 2) e 4)

Infine

$$1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

vale la 3)

(nella variabile x)

Polinomi di grado ≤ 3

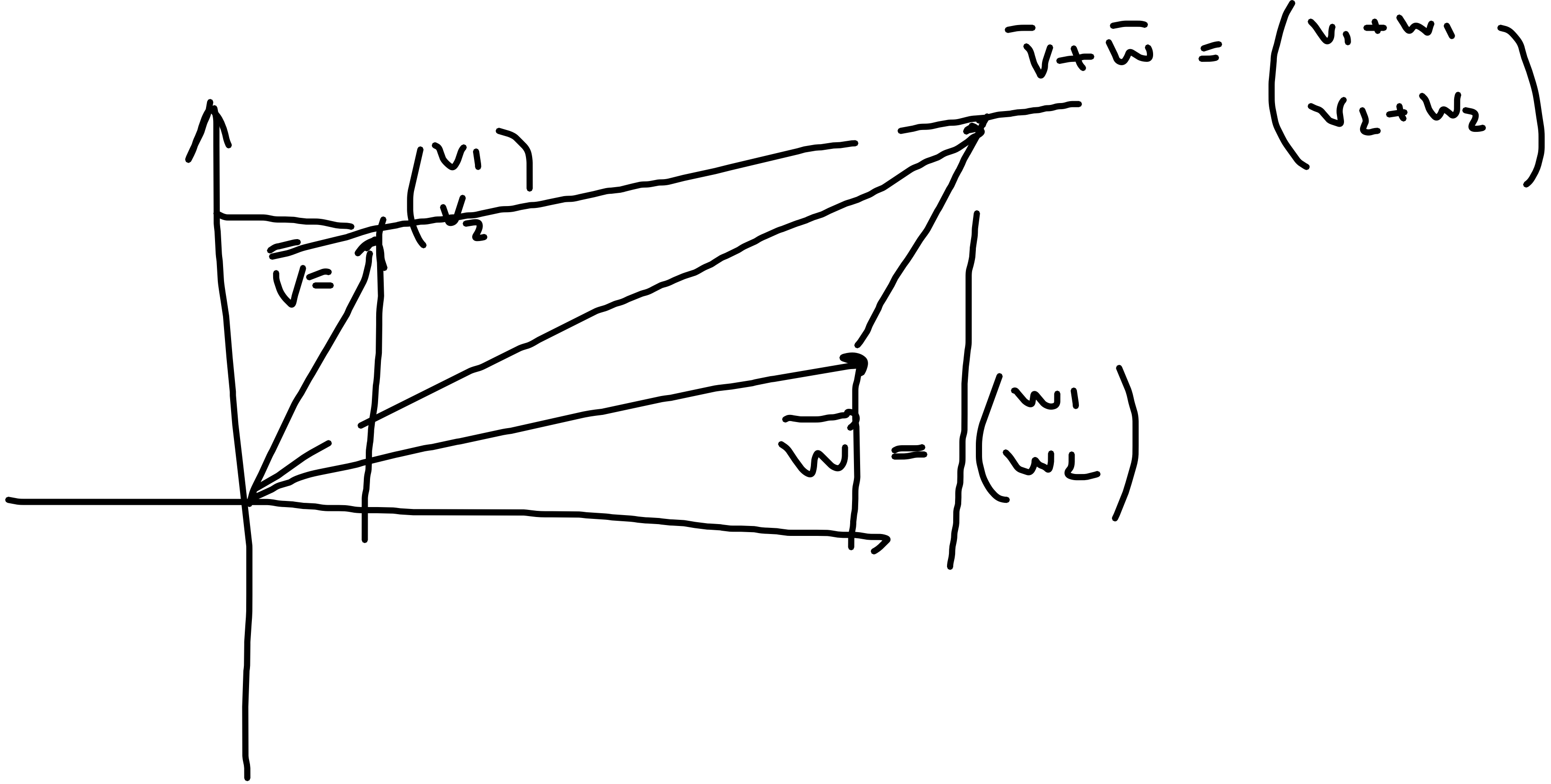
$$\left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad a_j \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) =$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 + (a_3 + b_3) x^3$$

Inoltre se $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda \cdot (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) =$

$$= \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \lambda a_3 x^3$$



Sia V uno spazio vettoriale (reale cioè con scalari in $\mathbb{R}$)

$V' \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V

se ristretto al sottoinsieme V' di V le operazioni di $+$ e prodotto per uno scalare sono ancora dotate delle proprietà prima elencate

In $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_j \in \mathbb{R} \right\}$

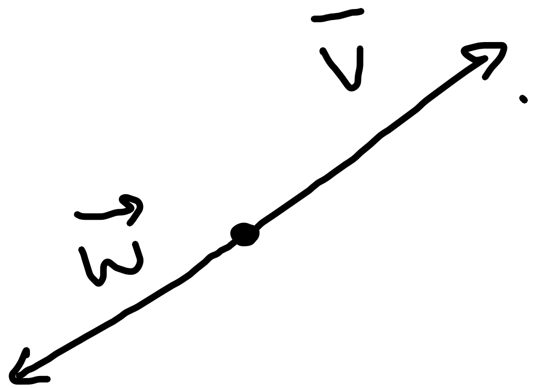
consideriamo $V' = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

V' è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$; infatti

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se V è uno spazio vettoriale allora $V' = V$ è sottospazio banale di V; inoltre $\{0_V\}$ è sottospazio di V (detto sottospazio nullo)

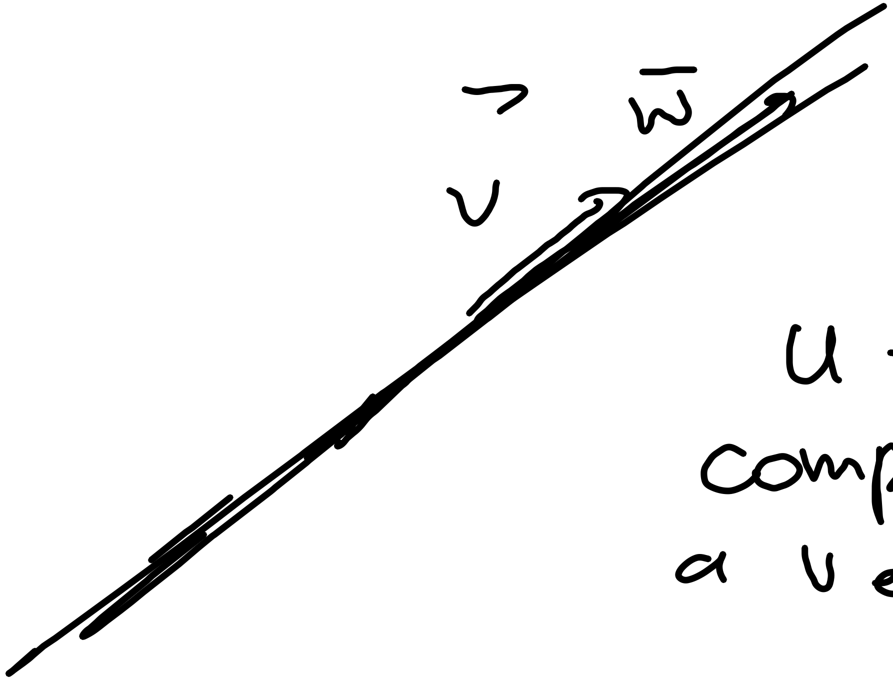
$v \in V$ $\quad \boxed{w = \lambda \cdot v}$ $\quad$ v e w hanno la stessa direzione



(ossia v e w sono paralleli)

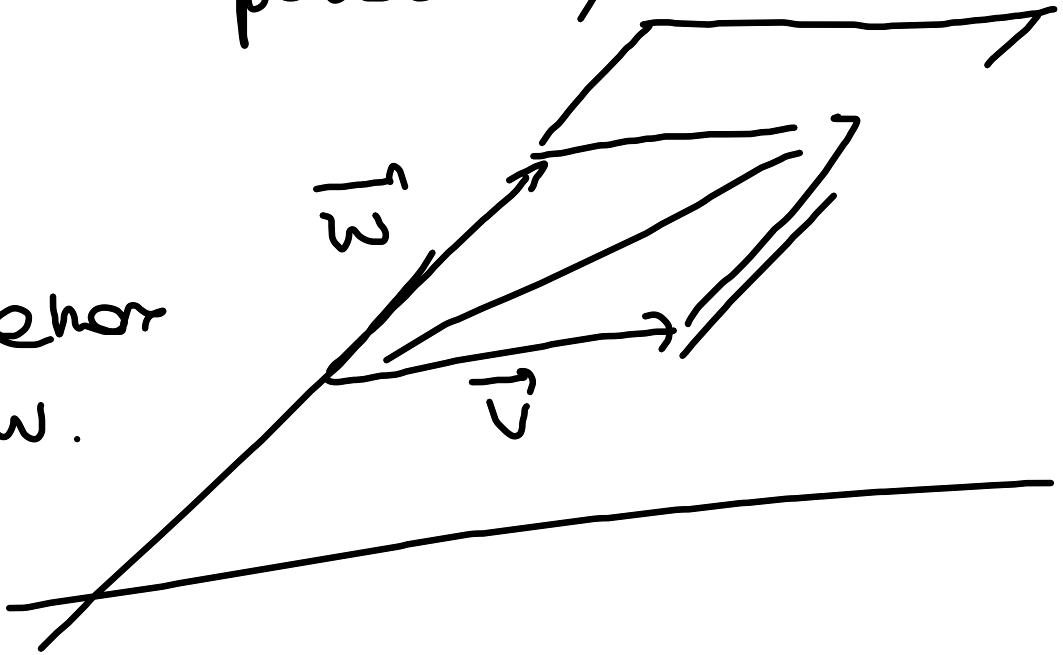
$$\boxed{u = \underline{\lambda v} + \underline{\mu w}}$$

① Se v e w sono paralleli, allora anche u è parallelo a v e w



② Se v e w non sono paralleli, allora

u è complanare a v e w.



Def Presi $v_1, \dots, v_n$ vettori di V, si dice COMBINAZIONE LINEARE dei vettori $v_1, \dots, v_n$ ogni vettore $w \in V$ che si scrive in questo modo

$$\boxed{w = \underline{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n} \quad \lambda_j \in \mathbb{R}}$$

Oss L'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1, \dots, v_n$ di V è un SOTTOSPAZIO di V

Tale sottospazio di V si dice GENERATO dai vettori $v_1, \dots, v_n$ (che si dicono GENERATORI del SOTTOSPAZIO) si indica con $\text{span}\langle v_1, \dots, v_n\rangle = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_j \in \mathbb{R}\}$

Es In $\mathbb{R}^3$ considero il vettore $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\{ \underbrace{\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\0\\0\end{pmatrix}}_{} \quad \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

$$= V'$$

Def Si dice che i vettori $v_1, \dots, v_n$ di V sono LINEARMENTE INDIPENDENTI se supposto

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

risulta $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Diremo che i vettori $v_1, \dots, v_n$ di V sono LINEARMENTE DIPENDENTI se esiste una combinazione lineare

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n = 0$$

con almeno un $\beta_j \neq 0$.

Se ad esempio $\beta_1 \neq 0$: $\beta_1 v_1 = -\beta_2 v_2 - \beta_3 v_3 - \dots - \beta_n v_n$

$$\boxed{v_1 = -\frac{\beta_2}{\beta_1} v_2 - \frac{\beta_3}{\beta_1} v_3 - \dots - \frac{\beta_n}{\beta_1} v_n}$$

Se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti, allora è possibile scrivere uno di tali vettori come combinazione lineare degli altri.

$\boxed{\text{Un insieme di generatori di uno spazio vettoriale } V \text{ che sia anche linearmente indipendente si dice una BASE di } V.}$

Es In $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \underset{"e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{"e_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{"e_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} \right\}$$ formano una base (detta canonica) di $\mathbb{R}^3$

Infatti, ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ lo posso scrivere come combinazione lineare di e_1, e_2 ed e_3.

Sia $\underline{v} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \underbrace{x_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

Mostriamo che e_1, e_2, e_3 (che generano $\mathbb{R}^3$) sono lin. indip.

$$\underline{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0}$$

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

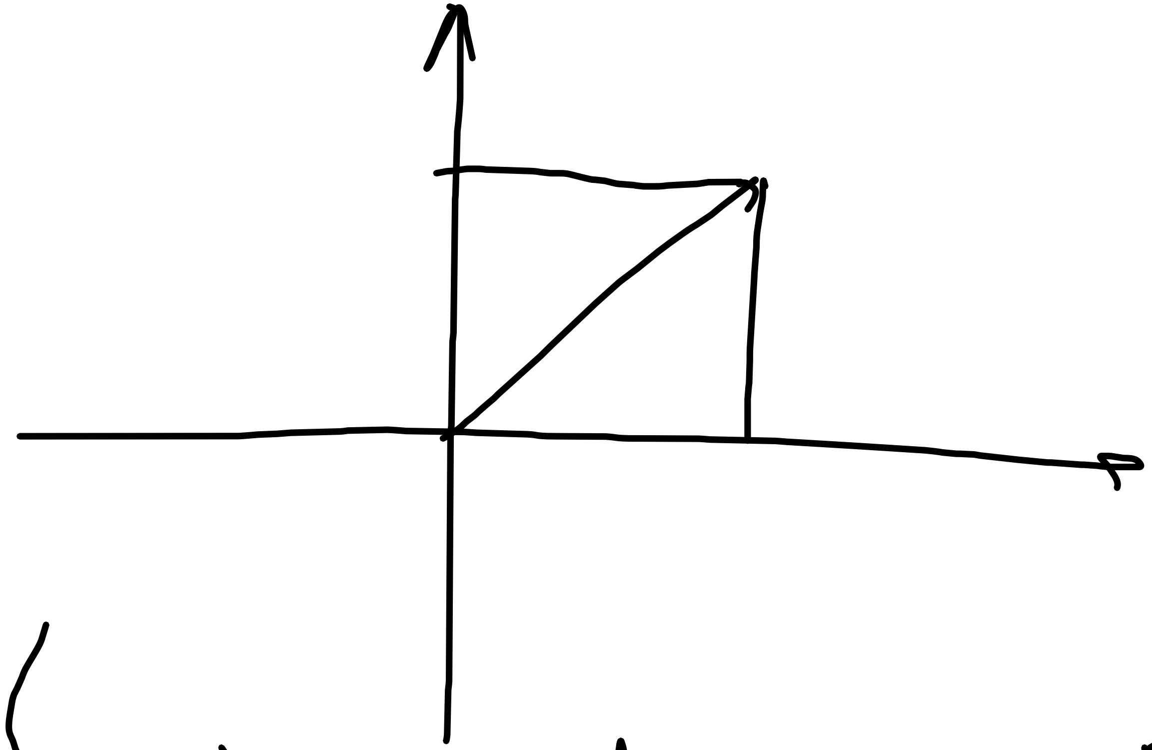
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{matrix}$$

In generale in $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \dots \right\}$ la base canonica è formata dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_2 \quad \dots \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_n$$

$n=2$ $\quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=e_1 \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=e_2$



$\alpha_1=\alpha_2$

$\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \right\}$ è un'altra base di $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix}\alpha_1-\alpha_2\\ \alpha_1+2\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$3\alpha_2=0$

$\alpha_2=0=\alpha_1$

Scelta una base in V, ad ogni vettore di V rimane UNIVOCAMENTE associata una n-upla di numeri reali detta <u>COORDINATE o</u> COMPONENTI di V nella base prescelta.

La cardinalità (ossia il numero di elementi) di una base dello spazio vettoriale V è detta DIMENSIONE di V. (Considereremo SEMPRE spazi vettoriali di dimensione finita).

Unicità delle coordinate

Sia $\mathcal{B} = \{ b_1, \ldots, b_n \}$ una base di V

se $v \in V$ $\quad v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$

$$= \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_n b_n$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = (\alpha_1 - \gamma_1) b_1 + \ldots + (\alpha_n - \gamma_n) b_n$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha_1 = \gamma_1 \ldots \quad \gamma_n = \alpha_n$$

$$\alpha_j = \gamma_j$$

Ricordiamo che dall'esperienza e dalla Fisica esiste un prodotto fra vettori, detto prodotto SCALARE (o INTERNO) che a una coppia di vettori associa uno scalare (un numero reale)

In $\mathbb{R}^n$, consideriamo $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y$

poniamo $x \cdot y = \langle \underline{x} | y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$

$$x \cdot y = \langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle = y \cdot x$$

$$\langle x+z | y \rangle = \langle x | y \rangle + \langle z | y \rangle$$

$$\langle \lambda \cdot x | y \rangle = \lambda \cdot \langle x | y \rangle$$

Notiamo che

$$\langle x | x \rangle = x \cdot x = x_1^2 + \ldots + x_n^2 =$$

$$= |x|^2$$

Def Siano V e W due spazi vettoriali reali

Si dice che $f: V \to W$ è un'applicazione lineare se comunque presi $v_1, v_2 \in V$ e $\lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}$ risulta

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \underbrace{f(v_1)}_{w_1 \in W} + \lambda_2 \underbrace{f(v_2)}_{w_2}$$

OSS Se f è lineare allora

$$f(0_V) = 0_W$$

Infatti $0_V = v - v \qquad v \in V$

per la linearità di f

$$f(0_V) = f(v - v) = f(v) + f(-v) = f(v) - f(v) = 0_W$$

Es $V = \mathbb{R}$ $W = \mathbb{R}$

$$\boxed{f(x) = a \cdot x}$$

$a \in \mathbb{R}$

Se $f : V \longrightarrow W$ è lineare

$$\mathrm{Ker}\, f = \{ v \in V : f(v) = 0_W \}$$

Infatti $0_V \in \mathrm{Ker}\, f$

Nucleo di f

$\mathrm{Ker}\, f \neq \emptyset$

Inoltre $\mathrm{Ker} f$ è un sottospazio di V

Infatti se $v, z \in \mathrm{Ker} f$ $\left(\begin{array}{l} \text{cioè se } f(z) = 0_W \\ f(v) = 0_W \end{array}\right)$

allora $v + z \in \mathrm{Ker} f$, dato che $f(z+v) = f(z) + f(v) = 0_W + 0_W$
$= 0_W$

Similmente $\lambda \cdot z \in \mathrm{Ker} f$ dato che $f(\lambda \cdot z) = \lambda f(z)$
$= \lambda \cdot 0_W = 0_W$

Analogamente consideriamo $\mathrm{Im} f = \{ w \in W$ tali che $\exists v \in V \; f(v) = w \}$

Anche $\mathrm{Im} f$ è un sottospazio di W.

Prop f lineare $f: V \to W$ è

$\boxed{\text{SURIETTIVA} \iff \operatorname{Im} f = W}$

INIETTIVA $\iff \operatorname{Ker} f = \{0_V\}$

$$f(v) = f(z) \iff f(v-z) = 0_W$$

$$\iff v - z \in \operatorname{Ker} f$$

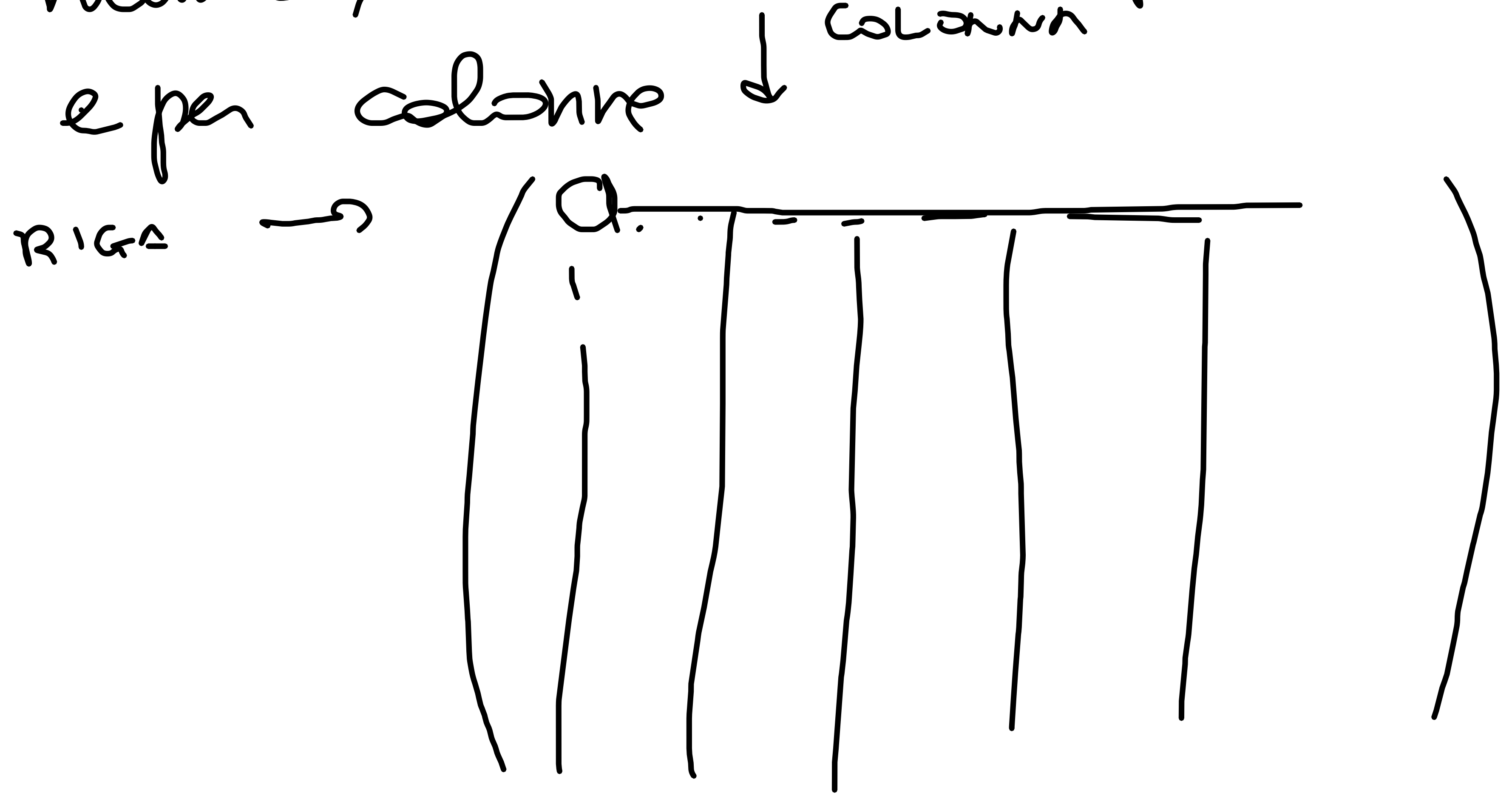
$$f \text{ iniettiva} \iff \operatorname{Ker} f = \{0_V\}$$

Teorema della dimensione

Sia $f: V \to W$ lineare (V, W spazi vettoriali di dimensione finita)

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \underline{\dim V}}$$

Consideriamo una <u>matrice</u> di numeri reali, cioè una tabella ordinata di numeri reali che disponiamo per righe e per colonne



$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$A = \left(a_{ij} \right) \quad \begin{array}{l} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m \end{array}$$

posto riga i-esima
colonna j-esima

Es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice A si dice di tipo $n \times m$ se ha n righe e m colonne.
Se $n=m$ la matrice si dice QUADRATA.

Oss Consideriamo le matrici di tipo $n \times m$, cioè tutte con n righe e m colonne

Es $n=2$ $m=3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ +1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} a_{ij} \in \mathbb{R} \\ 1 \leq i \leq 2 \quad 1 \leq j \leq 3 \end{matrix} \right\}$$

Per matrici dello stesso tipo posso definire una somma

$$A = \left(a_{ij} \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \qquad B = \left(b_{ij} \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

$$A + B = \left(\underline{a_{ij}} + \underline{b_{ij}} \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$$

e un prodotto per uno scalare λ

$$\lambda \cdot A = \left(\lambda a_{ij} \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$

$M(n,m,\mathbb{R}) = \{$ matrici a elementi reali di tipo $n \times m$ $\}$

con le operazioni di SOMMA e Prodotto per uno scalare come sopra definiti è uno spazio vettoriale reale (di dimensione $n \cdot m$).

<u>Oss</u> $M(n,1,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{j1} \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}^n$

Consideriamo una matrice di tipo $n \times m$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} \\ \boxed{A_2} \\ \\ \boxed{A_n} \end{pmatrix}$$

Consideriamo un vettore di $\mathbb{R}^m$. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} \langle A_1, x \rangle \\ \langle A_2, x \rangle \\ \\ \langle A_n, x \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$\in \mathbb{R}^m$

Es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{= A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^3} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \\ -2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^2}$$

Ma si può facilmente verificare che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \Downarrow & & \\ x & \longrightarrow & A \cdot x \end{array}$$

<u>è lineare</u>.

A matrice di tipo $n \times m$

Viceversa, dato un'applicazione lineare

$$f : V \to W$$

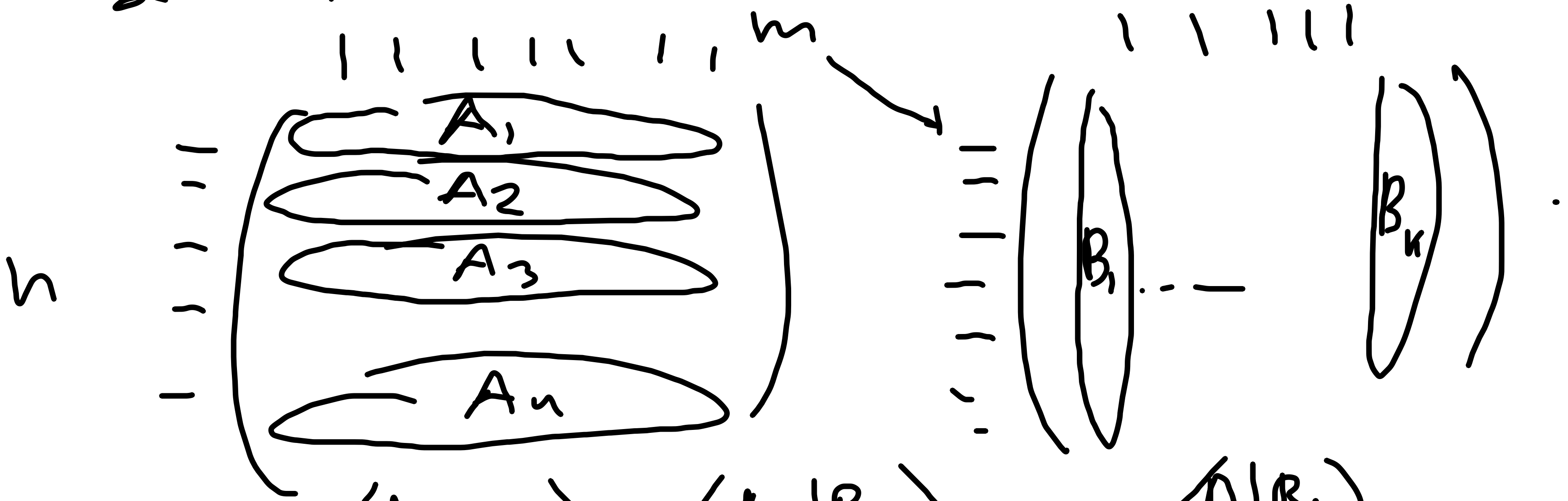
$\Big($ V, W spazi vettoriali di dimensione finita, sia $\dim V = m$ $\quad \dim W = n$ $\Big)$

fissata una base in V e una base in W

ESISTE UNIVOCAMENTE DETERMINATA una matrice A_f di tipo $n \times m$ tale che se $x \in V$ $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

$$W \ni f(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A_f \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Utilizzando il prodotto riga per colonne possiamo definire un prodotto fra matrici, ossia se A è di tipo $n \times m$ e B è di tipo $m \times k$



$$C = \begin{pmatrix} \langle A_1 | B_1 \rangle & \langle A_1 | B_2 \rangle & \cdots & \langle A_1 | B_k \rangle \\ \langle A_2 | B_1 \rangle & \cdots & & \langle A_2 | B_k \rangle \\ \langle A_n | B_1 \rangle & \cdots & & \langle A_n | B_k \rangle \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad 2 \times 2$$

In questo caso si può anche calcolare

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad 3 \times 3$$

Se A è quadrata $n \times n$ e B è quadrata $n \times n$

NON è detto che $A \cdot B = BA$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\neq \\ 0}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\substack{\neq \\ 0}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un sistema di equazioni lineari consiste di

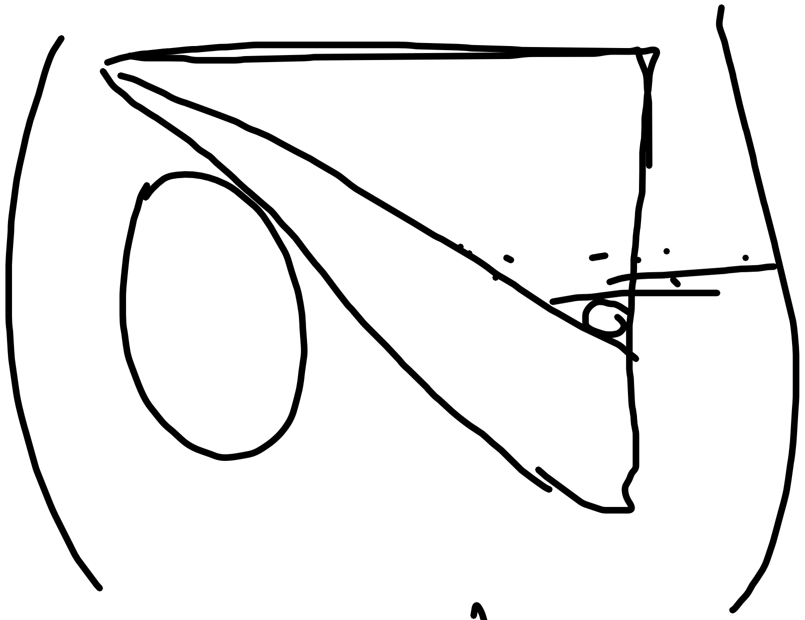
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots & + a_{1m} x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 \dots & + a_{nm} x_m = b_n \end{cases}$$

in forma matriciale diventa

$$\boxed{A \cdot x = b}$$

ove $A = \{ a_{ij} \}_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$A \longrightarrow$ 

In generale se A è una matrice quadrata $n \times n$ si dice che A' è inversa di A se A' è quadrata di tipo $n \times n$

$$A' \cdot A = A \cdot A' = Id = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$