Università degli Studi di Cassino

Facoltà di Economia

Appunti di Algebra Lineare

Prof. Sergio Bianchi*

Dispensa°

dei corsi di Matematica Generale,

a.a. 2008/09

* Le sezioni riguardanti la matrice inversa, gli autovalori/autovettori e le proprietà sulle matrici definite sono dovute al dott. di ric. Vincenzo Costa.

° Le presenti dispense riguardano il programma per il **DM 270**.
La presente versione è in corso di revisione.

1 Vettori

Definizione 1 (Vettore) *Prende il nome di* ***vettore ad m componenti reali*** *una m-pla ordinata di numeri reali.*

Esempio 2 *La coppia* $(1,3)$ *è un esempio di vettore a* 2 *componenti, la prima è* 1 *e la seconda è* 3*.*

Definizione 3 (Vettore riga) *Prende il nome di* ***vettore riga*** *il vettore le cui componenti sono disposte lungo una linea orizzontale (riga). Lo si indica con una delle seguenti notazioni*

$$\overline{a} = [a_1, a_2, ..., a_m] \quad o \quad \overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_m)$$

essendo $a_1, a_2, ..., a_m$ *le componenti del vettore* $\overline{a}$*.*

Definizione 4 (Vettore colonna) *Prende il nome di* ***vettore colonna*** *il vettore le cui componenti sono disposte lungo una linea verticale (colonna). Lo si indica con una delle seguenti notazioni*

$$\overline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad o \quad \overline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

essendo $a_1, a_2, ..., a_m$ *le componenti del vettore* $\overline{a}$*.*

Definizione 5 (Trasposizione) *Si chiama* ***trasposizione*** *l'operazione unaria che trasforma un vettore riga (colonna) in un vettore colonna (riga).*

Notazione 6 *Indichiamo il vettore trasposto del vettore* $\overline{a}$ *con il simbolo* $\overline{a}^T$ *o* $\overline{a}'$*.*

Esempio 7 *Dato il vettore* $\overline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ *il suo trasposto è il vettore* $\overline{a}^T = [a_1, a_2, a_3]$*.*

Osservazione 8 *Dalla definizione segue immediatamente che* $\left(\overline{a}^T\right)^T = \overline{a}$*.*

Definizione 9 (Vettore fondamentale) *Prende il nome di* ***i-esimo vettore fondamentale di ordine m****, e lo si indica con* $\overline{e}^i$*, il vettore avente tutte le componenti nulle tranne la i-esima, che è uguale ad 1. Cioè:*

$$\overline{e}^i := (0, 0, ..., \underset{i\text{-}esima\ componente}{1}, ..., 0)$$

Esempio 10 *I vettori* $\overline{e}^1 = (1, 0, 0)$, $\overline{e}^2 = (0, 1, 0)$, $\overline{e}^3 = (0, 0, 1)$ *sono i tre vettori fondamentali di ordine* 3.

Definizione 11 (Vettore nullo) *Prende il nome di **vettore nullo**, e lo si indica con* $\overline{0} = (0, 0, ..., 0)$*, il vettore le cui componenti sono tutte nulle.*

Definizione 12 (Scalare) *Prende il nome di **scalare** un qualsiasi numero reale.*

Osservazione 13 *Il termine scalare è mutuato dalla Fisica ed esprime il fatto che, fissata un'opportuna unità di misura (e dunque una scala), certe grandezze possono essere espresse da un numero reale (**grandezze scalari**, per l'appunto) mentre per altre grandezze occorre stabilire anche un'orientazione, cioè una direzione ed un verso (**grandezze vettoriali**). Così, mentre per esprimere la potenza del motore di un'auto è sufficiente una grandezza scalare (watt o cavalli/vapore), per caratterizzare il moto della vettura occorre precisare - oltre all'intensità di questo - in che direzione ed in quale senso di marcia avviene. Tali caratteristiche del moto (come pure di altri fenomeni) possono essere sintetizzate dal simbolo grafico di **vettore**, cioè da un segmento dotato di una freccia posta ad una delle estremità (detta **punto terminale** del vettore). In questo modo, fissata l'unità di misura, la lunghezza del segmento (anche detta **modulo**) esprime l'intensità del moto (maggiore è la lunghezza maggiore sarà lo spazio percorso dal veicolo), la **direzione** individuata dal segmento esprime quella in cui avviene il moto e la freccia esprime il **verso** in cui avviene il moto. L'estremità libera del vettore, cioè quella alla quale non è applicata la freccia, è detta **punto di origine** del vettore.*

1.1 Rappresentazione geometrica dei vettori

Le convenzioni introdotte nell'osservazione appena formulata consentono di rappresentare geometricamente la nozione di vettore. In particolare, per $m = 1$, $m = 2$ ed $m = 3$ l'interpretazione geometrica è immediata.

Per $m = 1$ consideriamo una retta orientata sulla quale sia fissata un'origine O ed un'unità di misura e conveniamo di assumere, come punto di origine di ciascun vettore (ad una sola componente), il punto O. Con queste assunzioni, ciascun vettore è univocamente determinato dal proprio punto terminale (fig. 1.a) e l'insieme di tutti i vettori che hanno una sola componente è pertanto in corrispondenza biunivoca con i punti della retta orientata, cioè con i numeri reali.

Per $m = 2$, nel piano cartesiano $x0y$, al vettore $\overline{a} = [a_1, a_2]$ (o $\overline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$) si può associare il punto P di coordinate (a_1, a_2). In questo modo, sempre con

la solita convenzione di assumere l'origine degli assi come punto di origine di ogni vettore a due componenti, si può rappresentare geometricamente il vettore $\overline{a}$ come un segmento uscente dall'origine 0 ed avente la "freccia" in P (Fig. 1.b). L'insieme dei vettori a due componenti è dunque posto in corrispondenza biunivoca con le coppie ordinate di numeri reali. Un'analoga rappresentazione può essere fornita per $m = 3$ (Fig. 1.c). In generale, per m qualsiasi, l'insieme dei vettori che hanno m componenti può essere posto in corrispondenza biunivoca con le m-ple ordinate di numeri reali. Come anticipato dall'Osservazione 13 il generico vettore ad m componenti è individuato da:
(a) un **modulo**, cioè dalla sua lunghezza espressa in una data scala;
(b) una **direzione**, data dalla retta sulla quale giace il vettore;
(c) un **verso**, uno dei due alternativi sulla retta che dà la direzione del vettore.

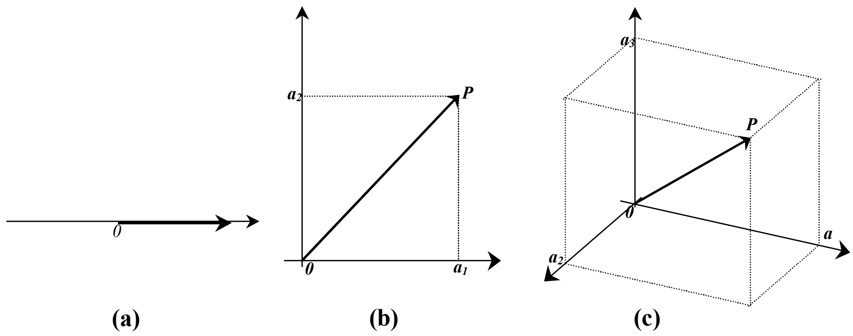

Figura 1

Definizione 14 (Uguaglianza tra vettori) *I due vettori $\overline{a}$ e $\overline{b}$ entrambi ad n componenti si dicono **uguali**, e si scrive $\overline{a} = \overline{b}$, se e solo se $a_i = b_i$ per $i = 1, 2, ..., m$.*

Esempio 15

$$\begin{array}{l} \text{I vettori } \overline{a} = [1,2,3] \quad \text{e} \quad \overline{b} = [1,2,3] \text{ sono uguali.} \\ \text{I vettori } \overline{a} = [1,2,3] \quad \text{e} \quad \overline{b} = [2,1,3] \ \textbf{non} \text{ sono uguali.} \end{array}$$

I vettori $\overline{a} = [1,2,3]$ *e* $\overline{b} = [1,2,3,4]$ **non** *sono uguali...*[1]

Definizione 16 (Somma di vettori) *Dati i vettori $\overline{a}$ e $\overline{b}$, entrambi ad m componenti, si definisce loro **somma** il vettore*

$$\overline{a} + \overline{b} := [a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_m + b_m]$$

Esempio 17 *Dati i vettori $\overline{a} = [1,3,5]$ e $\overline{b} = [2,4,6]$, $\overline{a} + \overline{b} = [3,7,11]$*

Osservazione 18 *E' immediato verificare che $(\overline{a}^T + \overline{b}^T) = (\overline{a} + \overline{b})^T$*

[1] ...né ha senso confrontarli, poiché non hanno un ugual numero di componenti (il primo ha tre componenti, il secondo quattro).

1.2 Interpretazione geometrica della somma di due vettori

Consideriamo due vettori aventi due componenti, $\overline{a} = [a_1, a_2]$ e $\overline{b} = [b_1, b_2]$. Per le proprietà metriche del piano, il vettore somma $\overline{a} + \overline{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$ può interpretarsi come la diagonale del parallelogramma OACB (Fig. 2).

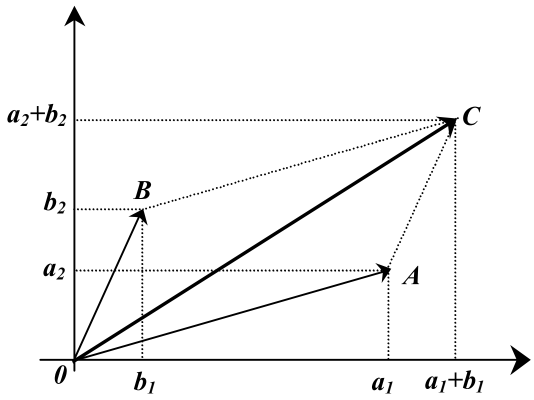

Figura 2

Esempio 19 *Dati i vettori* $\overline{a} = [2, 2]$ *e* $\overline{b} = [-1, -2]$*, il vettore* $\overline{a} + \overline{b} = [2 - 1, 2 - 2] = [1, 0] = \overline{e}^1$ *(Fig. 3).*

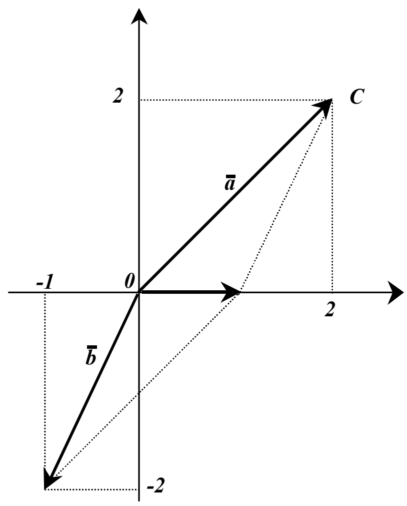

Figura 3

Osservazione 20 *Se i vettori che vengono sommati hanno la stessa direzione, il parallelogramma degenera (Fig. 4). Per esempio, si consideri il vettore somma dei vettori* $\overline{a} = [2, 1]$ *e* $\overline{b} = \left[3, \frac{3}{2}\right]$ $(\overline{a} + \overline{b} = \left[5, \frac{5}{2}\right])$.

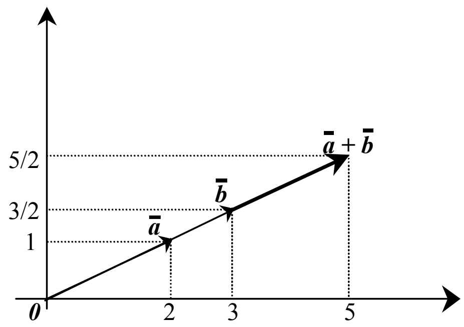

Figura 4

Definizione 21 (Prodotto di uno scalare per un vettore) *Dati il vettore* $\overline{a} = [a_1, a_2, ..., a_m]$ *e lo scalare* λ, *prende il nome di* ***prodotto*** *dello scalare* λ *per il vettore* $\overline{a}$ *il vettore*

$$\lambda\overline{a} := [\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_m]$$

cioè il vettore le cui componenti si ottengono moltiplicando per λ *ciascuna delle componenti del vettore* $\overline{a}$.

Esempio 22 *Dati lo scalare* $\lambda = -2$ *ed il vettore* $\overline{a} = [0, -1, 2]$, $\lambda\overline{a} = [0, 2, -4]$.

Osservazione 23 *Il vettore* $(-1)\overline{a} = [-a_1, -a_2, ..., -a_m]$ *prende il nome di* ***opposto*** *di* $\overline{a}$.

Osservazione 24 *Dalla definizione segue che* $0\overline{a} = \overline{0}$, *quale che sia il vettore* $\overline{a}$.

1.3 Interpretazione geometrica del prodotto di uno scalare per un vettore

Per come è stato definito il prodotto dello scalare λ per il vettore $\overline{a}$, le componenti del vettore $\lambda\overline{a}$ sono proporzionali (con fattore di proporzionalità λ) a quelle del vettore $\overline{a}$. Pertanto il vettore $\lambda\overline{a}$ ha la stessa direzione del vettore $\overline{a}$ e:
(a) stesso verso di $\overline{a}$ se $\lambda > 0$ (Fig. 5.a);
(b) verso opposto di $\overline{a}$ se $\lambda < 0$ (Fig. 5.b).

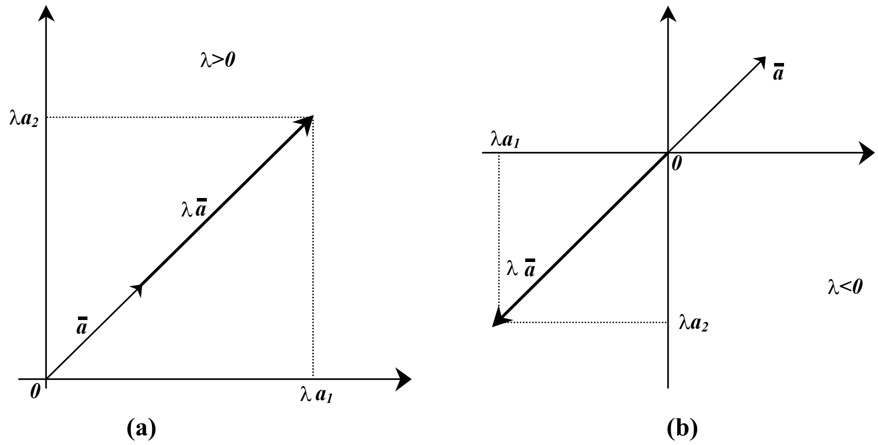

Figura 5

Definizione 25 (Prodotto scalare) *Dati i vettori $\overline{a}$ e $\overline{b}$, entrambi ad m componenti, prende il nome di* ***prodotto scalare****, e lo si indica con $\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle$, il numero reale*

$$\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i.$$

Esempio 26 *Dati i vettori $\overline{a} = \left[\frac{1}{3}, -1, 2\right]$ e $\overline{b} = \left[3, -1, \frac{1}{2}\right]$ il loro prodotto scalare è*

$$\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle = \frac{1}{3} \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Esempio 27 *Sia $\overline{q} = [q_1, q_2, ..., q_m]$ il vettore delle quantità di m prodotti acquistati da un soggetto economico e $\overline{p} = [p_1, p_2, ..., p_m]$ il vettore dei corrispondenti prezzi dei prodotti $1, 2, ..., m$. Il prodotto scalare $\langle \overline{p}, \overline{q} \rangle = \sum_{i=1}^{m} p_i q_i$ esprime il valore complessivo dei beni acquistati.*

Osservazione 28 *Il prodotto scalare verifica le tre seguenti proprietà:*

1. $\langle \overline{a}, \overline{a} \rangle > 0 \quad se \quad \overline{a} \neq \overline{0}$;
2. $\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle = \langle \overline{b}, \overline{a} \rangle$;
3. $\langle \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}, \overline{c} \rangle = \alpha \langle \overline{a}, \overline{c} \rangle + \beta \langle \overline{b}, \overline{c} \rangle$ *essendo α, β due scalari*

che definiscono una più generale applicazione chiamata ***prodotto interno di due vettori****.*

Osservazione 29 *Dalla definizione segue che $\langle \overline{a}, \overline{a} \rangle = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$.*

Definizione 30 (Norma euclidea) *Prende il nome di* ***norma euclidea*** (***o modulo***) ***del vettore*** *$\overline{a}$, e la si indica con $\|\overline{a}\|$, il numero reale $\|\overline{a}\| = \sqrt{\langle \overline{a}, \overline{a} \rangle}$.*

Esempio 31 *Dato il vettore* $\overline{a} = [2,5,4,6]$ *la sua norma euclidea è* $\|\overline{a}\| = \sqrt{\langle \overline{a}, \overline{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} = \sqrt{4 + 25 + 16 + 36} = 9.$

Osservazione 32 *Come mostra la seguente interpretazione geometrica, la nozione di norma euclidea estende quella di* ***distanza.***

1.4 Interpretazione geometrica della norma euclidea

Si è appena definita la *norma euclidea* (o *modulo*) del vettore $\overline{a}$ come $\|\overline{a}\| = \sqrt{\langle \overline{a}, \overline{a} \rangle}$. Se $\overline{a}$ è un vettore a due componenti, sviluppando secondo la definizione di prodotto scalare (v.) si ha: $\|\overline{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{(a_1 - 0)^2 + (a_2 - 0)^2}$. E' dunque immediato, in relazione al sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, interpretare $\|\overline{a}\|$ come la distanza del punto A di coordinate (a_1, a_2) dall'origine O degli assi (Fig. 6). Tale interpretazione può immediatamente estendersi a vettori con $m > 2$ componenti.

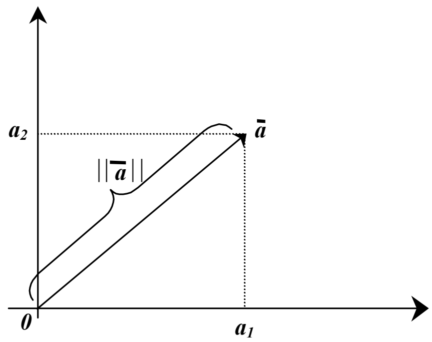

Figura 6

Osservazione 33 *Assunta l'interpretazione geometrica appena data della norma euclidea è facile estenderne il significato all'espressione* $\left\|\overline{a} - \overline{b}\right\|$. *Supposti per fissare le idee* $\overline{a}, \overline{b}$ *vettori a due componenti, sarà:* $\left\|\overline{a} - \overline{b}\right\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$, *formula che − come è noto dalla geometria analitica − fornisce, sempre in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, la distanza tra il punto A di coordinate* (a_1, a_2) (*componenti del vettore* $\overline{a}$) *ed il punto B di coordinate* (b_1, b_2) (*componenti del vettore* $\overline{b}$) (*Fig. 7*).

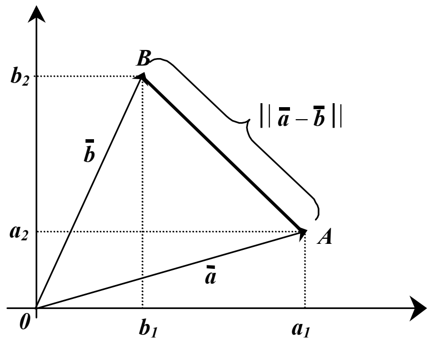

Figura 7

Proprietà 34 (della somma e del prodotto di uno scalare per un vettore) *Dati i vettori $\overline{a}, \overline{b}$ e $\overline{c}$, aventi lo stesso numero di componenti, e gli scalari α e β, è facile verificare che valgono le seguenti proprietà:*

$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$	*commutativa*
$\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$	*associativa*
$\alpha(\overline{a}+\overline{b})=\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$	*distributiva (del prodotto rispetto alla somma)*
$(\alpha+\beta)\overline{a}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$	*distributiva (della somma rispetto al prodotto)*
$(\alpha\beta)\overline{a}=\alpha(\beta\overline{a})$	

Definizione 35 (Spazio vettoriale) *Prende il nome di* ***spazio vettoriale ad m dimensioni****, e si indica con $\mathbb{R}^m$, l'insieme (non vuoto) dei vettori ad m componenti dotato delle operazioni di addizione di vettori e di moltiplicazione di uno scalare per un vettore.*

Esempio 36 *Il vettore $\overline{a}=[-2,1,3]\in\mathbb{R}^3$. Il vettore $\overline{b}=2\overline{a}=[-4,2,6]\in\mathbb{R}^3$. Il vettore $\overline{a}+\overline{b}=[-6,3,9]\in\mathbb{R}^3$.*

Definizione 37 *Il sottoinsieme non vuoto A di $\mathbb{R}^m$ è chiuso rispetto alle operazioni di addizione di vettori e di moltiplicazione di uno scalare per un vettore se $\forall\overline{x},\overline{y}\in A$ e $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ anche il vettore $\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}\in A$.*

Osservazione 38 *Dalla definizione di spazio vettoriale segue immediatamente che* ***condizione necessaria*** *affinché $\mathbb{R}^m$ sia uno spazio vettoriale è che il vettore nullo appartenga ad $\mathbb{R}^m$. Infatti comunque scelti i vettori $\overline{x},\overline{y}\in\mathbb{R}^m$, ponendo $\alpha=\beta=0$, il vettore $\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}=\overline{0}$; pertanto, affinché risulti chiuso rispetto all'addizione ed alla moltiplicazione, lo spazio $\mathbb{R}^m$ deve contenere il vettore nullo.*

Definizione 39 *Consideriamo un sottoinsieme A dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$. E' ovvio che, essendo definite rispetto allo spazio $\mathbb{R}^m$, le operazioni di addizione di vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare continuano ad essere* *definite anche rispetto al sottoinsieme A. Tuttavia, nulla garantisce che A sia chiuso rispetto alle due operazioni; in altri termini, nulla assicura che comunque scelti due vettori* $\overline{x}, \overline{y} \in A$ *e due scalari* α *e* β *il vettore* $\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}$ *appartenga ancora ad A. Se ciò si verifica A prende il nome di* ***sottospazio vettoriale di*** $\mathbb{R}^m$.

Esempio 40 *Sia* $A = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m : \overline{x} = [x_1, ..., x_{k-1}, 0, x_{k+1}, ..., x_m]\}$, *cioè A è l'insieme dei vettori di* $\mathbb{R}^m$ *aventi la k-esima componente pari a* 0 $(1 \leq k \leq m)$. *L'insieme A costituisce un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^m$ *in quanto,* $\forall \overline{x}, \overline{y} \in A$ *e* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$\begin{aligned}\alpha\overline{x}+\beta\overline{y} &= \alpha[x_1, ..., x_{k-1}, 0, x_{k+1}, ..., x_m] + \beta[y_1, ..., y_{k-1}, 0, y_{k+1}, ..., y_m] = \\ &= [\alpha x_1, ..., \alpha x_{k-1}, 0, \alpha x_{k+1}, ..., \alpha x_m] + [\beta y_1, ..., \beta y_{k-1}, 0, \beta y_{k+1}, ..., \beta y_m] = \\ &= [\alpha x_1 + \beta y_1, ..., \alpha x_{k-1} + \beta y_{k-1}, 0, \alpha x_{k+1} + \beta y_{k+1}, ..., \alpha x_m + \beta y_m] \in A\end{aligned}$$

Riferito per esempio allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, *il sottospazio A può essere interpretato come uno dei tre piani ottenuti per proiezione (piano* XY *se* $Z = 0$, *piano* XZ *se* $Y = 0$ *o piano* YZ *se* $X = 0$).

Esempio 41 *Sia* $A = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m : \overline{x} = [x_1, x_2, ..., x_{m-1}, \sum_{i=1}^{m-1} x_i]\}$, *cioè A è l'insieme dei vettori di* $\mathbb{R}^m$ *la cui m-esima componente è pari alla somma delle prime* $m-1$ *componenti. L'insieme A è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^m$ *perché,* $\forall \overline{x}, \overline{y} \in A$ *e* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$\begin{aligned}\alpha\overline{x}+\beta\overline{y} &= \alpha\left[x_1, ..., x_{m-1}, \sum_{i=1}^{m-1} x_i\right] + \beta\left[y_1, ..., y_{m-1}, \sum_{i=1}^{m-1} y_i\right] = \\ &= \left[\alpha x_1 + \beta y_1, ..., \alpha x_{m-1} + \beta y_{m-1}, \alpha\sum_{i=1}^{m-1} x_i + \beta\sum_{i=1}^{m-1} y_i\right] = \\ &= \left[\alpha x_1 + \beta y_1, ..., \alpha x_{m-1} + \beta y_{m-1}, \sum_{i=1}^{m-1}(\alpha x_i + \beta y_i)\right]\end{aligned}$$

cioè l'm-esima componente del vettore $\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}$ *è ancora pari alla somma delle prime* $m-1$ *componenti e pertanto il vettore* $\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}$ *è un elemento del sottoinsieme A di* $\mathbb{R}^m$.

Consideriamo ora un esempio di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$ che *non è un sottospazio.*

Esempio 42 *Sia dato in* $\mathbb{R}^m$ *il sottoinsieme* $A = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^m : \overline{x} = [x_1,\ x_2, ...,\ x_{m-1},\ k]\}$, *cioè l'insieme formato dai vettori di* $\mathbb{R}^m$ *la cui m-esima componente è pari alla costante* $k \neq 0$. *Per ogni* $\overline{x}, \overline{y} \in A$ *e* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$\begin{aligned}\alpha\overline{x}+\beta\overline{y} &= \alpha\,[x_1, ..., x_{m-1}, k] + \beta\,[y_1, ..., y_{m-1}, k] = \\ &= [\alpha x_1 + \beta y_1, ..., \alpha x_{m-1} + \beta y_{m-1}, \alpha k + \beta k] = \\ &= [\alpha x_1 + \beta y_1, ..., \alpha x_{m-1} + \beta y_{m-1}, (\alpha+\beta)k]\end{aligned}$$

Il vettore $\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}$ *non ha l'm-esima componente uguale a k, essendo* $(\alpha+\beta)k$ $= k$ *se e solo se* $\alpha+\beta = 1$. *Pertanto A* ***non*** *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{R}^m$.

Definizione 43 (Combinazione lineare) *Siano dati n vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$ ed n scalari $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$* [2]. *Prende il nome di* ***combinazione lineare*** *degli n vettori con coefficienti (o pesi) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ il vettore*

$$\overline{a} = \lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + ... \lambda_n \overline{a}_n \qquad \left(\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{a}_i \right)$$

Osservazione 44 *Il vettore nullo $\overline{0}$ può esprimersi come combinazione lineare di un numero qualsiasi di vettori qualsiasi di $\mathbb{R}^m$ potendo scegliere, nella combinazione lineare $\overline{0} = \lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + ... \lambda_n \overline{a}_n$, i coefficienti $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ quali che siano i vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$.*

Esempio 45 *Dati i vettori $\overline{a}_1 = [-1, 2, 0]$ e $\overline{a}_2 = [1, -1, 3]$ e gli scalari $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$ la loro combinazione lineare è il vettore*

$$-1[-1, 2, 0] + 2[1, -1, 3] = [1, -2, 0] + [2, -2, 6] = [3, -4, 6].$$

Definizione 46 (Combinazione lineare convessa) *Prende il nome di* ***combinazione lineare convessa*** *dei vettori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \in \mathbb{R}^m$ il vettore $\overline{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{x}_k$ con $\alpha_k \geq 0$ (per $k = 1, 2, ..., n$) e $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$.*

Esempio 47 *Consideriamo nel piano cartesiano i punti di coordinate $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. Come è noto dalla geometria analitica, il punto medio del segmento che congiunge i due punti ha coordinate $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Interpretando i punti A e B come estremi dei vettori $\overline{a} = [x_1, y_1]$ e $\overline{b} = [x_2, y_2]$ di $\mathbb{R}^2$, il punto medio esprime la combinazione lineare convessa (con coefficienti $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$) dei vettori $\overline{a}$ e $\overline{b}$:*

$$\frac{1}{2}[x_1, y_1] + \frac{1}{2}[x_2, y_2] = \left[\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right] + \left[\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2}\right] = \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right]$$

Si osservi infatti che α_1 e α_2 sono entrambi non negativi e $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, come richiede la definizione di combinazione lineare convessa.

Esempio 48 *In una data collettività composta da T individui, t_1 individui percepiscono un reddito pari a r_1 lire, t_2 individui un reddito pari a r_2 lire,..., t_n individui un reddito pari a r_n lire (con $t_1 + t_2 + ... + t_n = T$). L'espressione*

$$\frac{t_1}{T} r_1 + \frac{t_2}{T} r_2 + ... + \frac{t_n}{T} r_n \tag{1}$$

fornisce il reddito medio ponderato della popolazione considerata. Interpretando r_i (per $i = 1, 2, ..., n$) come vettore dello spazio $\mathbb{R}^1$ ed essendo $\frac{t_i}{T} \geq 0$ (per $i = 1, 2, ..., n$) e $\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{T} = 1$, la (1) è la combinazione lineare convessa (con pesi pari alle frequenze relative) dei redditi.

---

[2] E' irrilevante la relazione tra m ed n, nel senso che può essere $m \gtreqless n$.

Definizione 49 (Insieme convesso, 1) *Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^m$ si dice* ***convesso*** *se, comunque scelti n ($n \geq 2$) suoi elementi, ogni loro combinazione lineare convessa è ancora un elemento di X.*

Definizione 50 (Insieme convesso, 2) *Equivalentemente,* ***un insieme è convesso se il segmento che congiunge due suoi elementi qualsiasi appartiene all'insieme stesso*** (*Fig. 8*)

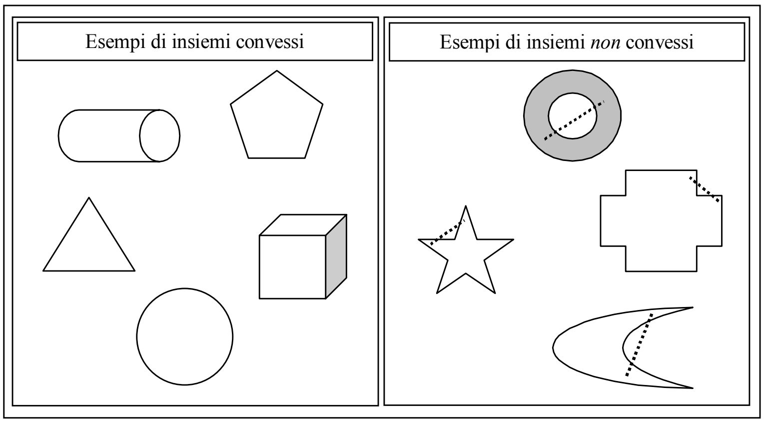

Figura 8

L'equivalenza tra le due definizioni di *insieme convesso* può essere dedotta in due passi, osservando che:

(a) il segmento che unisce due elementi (vettori) appartenenti ad un dato insieme è scrivibile come combinazione lineare convessa dei due elementi (vettori);

(b) una combinazione lineare convessa di n ($n > 2$) elementi può essere scritta come combinazione lineare convessa di $n-1$ elementi.

Mostriamo (a). Dalla geometria analitica è noto che, dati i punti A di coordinate (a_1, a_2) e B di coordinate (b_1, b_2), ogni punto P del segmento $\overline{AB}$ ha coordinate (x_1, x_2) tali che

$$\frac{x_1 - b_1}{a_1 - b_1} = \frac{x_2 - b_2}{a_2 - b_2} = \alpha \in [0, 1],$$

cioè tali che i rapporti $\frac{x_1 - b_1}{a_1 - b_1}$ e $\frac{x_2 - b_2}{a_2 - b_2}$ sono uguali tra loro ed assumono un valore (che abbiamo chiamato α) compreso tra 0 e 1.

Il risultato vale anche in $\mathbb{R}^m$. Dati i punti A di coordinate $(a_1, a_2, ..., a_m)$ e B di coordinate $(b_1, b_2, ..., b_m)$ il segmento che li congiunge ha coordinate $(x_1, x_2, ..., x_m)$ tali che

$$\frac{x_1 - b_1}{a_1 - b_1} = \frac{x_2 - b_2}{a_2 - b_2} = ... = \frac{x_m - b_m}{a_m - b_m} = \alpha \in [0, 1]$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 = \alpha(a_1 - b_1) + b_1 \\ x_2 = \alpha(a_2 - b_2) + b_2 \\ \vdots \\ x_m = \alpha(a_m - b_m) + b_m \end{cases} \qquad (\alpha \in [0,1]) \tag{2}$$

In modo compatto, ponendo $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_m)$, $\overline{b} = (b_1, b_2, ..., b_m)$ e $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$, il sistema (2) può scriversi come[3].

$$\overline{x} = \alpha(\overline{a} - \overline{b}) + \overline{b}, \quad \text{con } \alpha \in [0,1].$$

Eseguendo il prodotto e raggruppando rispetto a $\overline{b}$ si ha

$$\overline{x} = \alpha\overline{a} + (1-\alpha)\overline{b}, \qquad (\alpha \in [0,1])$$

relazione che esprime il generico punto $\overline{x}$ del segmento $\overline{AB}$ attraverso la combinazione lineare convessa dei punti $\overline{a}$ e $\overline{b}$.

Mostriamo (b). La combinazione lineare convessa

$$\alpha_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2 + \alpha_3\overline{x}_3 + ... + \alpha_n\overline{x}_n$$

può equivalentemente scriversi come

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\overline{x}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\overline{x}_2\right) + \alpha_3\overline{x}_3 + ... + \alpha_n\overline{x}_n. \tag{3}$$

La quantità $\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\overline{x}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\overline{x}_2$ è a sua volta la combinazione lineare convessa dei vettori $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$; i pesi della combinazione sono infatti entrambi minori di 1 e la loro somma è $\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} = 1$. Denotando con $x^{(1)}$ il punto individuato da tale combinazione lineare convessa, la (3) può scriversi come

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\overline{x}^{(1)} + \alpha_3\overline{x}_3 + ... + \alpha_n\overline{x}_n$$

che è una combinazione lineare convessa di $n-1$ elementi. Il procedimento può essere iterato, fino ad arrivare a due soli elementi, cioè all'espressione

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\right) x^{(n-2)} + \alpha_n x_n$$

che è la combinazione lineare convessa degli elementi $x^{(n-2)}$ e x^n; per quanto visto in (a) tale espressione descrive, dal punto di vista geometrico, un segmento. Il procedimento seguito è schematizzato in Figura 9, nel caso particolare di una combinazione lineare convessa di cinque elementi

[3] La giustificazione di ciò è data nel paragrafo seguente.

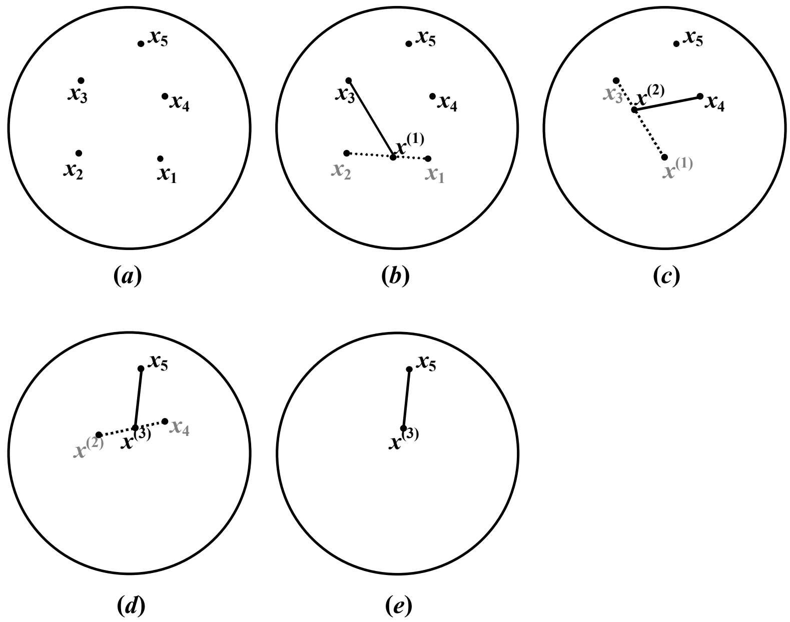

Figura 9

Esempio 51 *L'equivalenza tra le due definizioni di insieme convesso prima date può essere dedotta, quando $n = 2$ e lo spazio vettoriale è $\mathbb{R}^2$, ragionando sull'insieme individuato dalla combinazione lineare convessa di due elementi dati. In altri termini, stante la definizione precedente, diremo che $X \subseteq \mathbb{R}^2$ è un insieme convesso se, comunque scelti due suoi vettori (siano $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$) e lo scalare $\alpha \in [0, 1]$ anche il vettore*

$$\alpha\overline{x}_1 + (1 - \alpha)\overline{x}_2 \tag{4}$$

appartiene ad X. La (4) può equivalentemente scriversi come

$$\alpha(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + \overline{x}_2 \qquad (con\ \alpha \in [0, 1]).$$

Il vettore $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$ è individuato con la regola del parallelogramma applicata alla somma $\overline{x}_1 + (-\overline{x}_2)$, essendo il secondo addendo l'opposto del vettore $\overline{x}_2$. Poiché $\alpha \in [0, 1]$ il prodotto $\alpha(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)$ è un vettore avente stessa direzione e verso del vettore $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$ ma modulo minore o al più uguale a quello del vettore $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$. Addizionando i due vettori ($\alpha(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)$ e $\overline{x}_2$), al variare di α nell'intervallo $[0, 1]$ sarà univocamente determinato (con la solita regola del parallelogramma) il vettore combinazione lineare convessa, le cui componenti individueranno tutti e soli i punti che giacciono sul segmento che unisce i punti terminali dei vettori $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$ (Fig. 10).

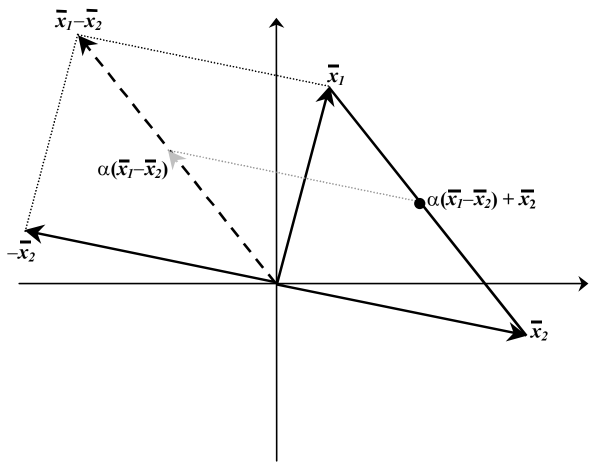

Figura 10

Si osservi che se $\alpha = \frac{1}{2}$ si ricade nel caso particolare già considerato in cui il vettore combinazione lineare convessa individua il punto medio del segmento che congiunge gli estremi dei vettori $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_2$.

1.5 Relazione tra un'uguaglianza vettoriale e un sistema di uguaglianze scalari

Prima di considerare l'impiego della nozione di combinazione lineare in relazione al concetto di dipendenza lineare (v. avanti), chiariamo un'utile interpretazione dell'uguaglianza tra vettori (giustificata dall'aver constatato che una combinazione lineare di vettori di $\mathbb{R}^m$ è ancora un vettore di $\mathbb{R}^m$). Consideriamo la combinazione lineare

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{u} \tag{5}$$

essendo $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ vettori colonna di $\mathbb{R}^m$, con $\overline{x}_i = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{mi} \end{bmatrix}$ per $i = 1, 2, ..., n$.

Sviluppando l'uguaglianza vettoriale si ha

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{m2} \end{bmatrix} + ... + \lambda_n \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

cioè

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12} + ... + \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} + \lambda_2 x_{22} + ... + \lambda_n x_{2n} \\ \vdots \\ \lambda_1 x_{m1} + \lambda_2 x_{m2} + ... + \lambda_n x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

o, in modo equivalente

$$\begin{cases} \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{12} + ... + \lambda_n x_{1n} = u_1 \\ \lambda_1 x_{21} + \lambda_2 x_{22} + ... + \lambda_n x_{2n} = u_2 \\ ... \\ \lambda_1 x_{m1} + \lambda_2 x_{m2} + ... + \lambda_n x_{mn} = u_m \end{cases} \tag{6}$$

Possiamo pertanto concludere che *un'uguaglianza vettoriale equivale ad un sistema di uguaglianze scalari* (sistema formato da tante uguaglianze scalari quante sono le componenti dei vettori o, il che è lo stesso, da tante uguaglianze scalari quant'è la dimensione m dello spazio vettoriale).

Definizione 52 (Vettori linearmente dipendenti) *n vettori ($n \geq 2$) $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, ..., $\overline{a}_n$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$ si dicono **linearmente dipendenti** (l.d.) se esiste una loro combinazione lineare, con coefficienti non tutti nulli, uguale al vettore nullo (cioè se esistono n scalari $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ non tutti nulli tali che la combinazione lineare $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n$ sia uguale al vettore nullo).*

Esempio 53 *I vettori $\overline{a} = [-2, -1]$ e $\overline{b} = [-4, -2]$ sono l.d. Infatti, affinché sia*

$$\lambda_1[-2, -1] + \lambda_2[-4, -2] = [0, 0]$$

è sufficiente scegliere $\lambda_1 = -2\lambda_2$, con λ_2 numero reale qualsiasi.

Osservazione 54 *Si osservi che un insieme di vettori $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ del quale faccia parte anche il vettore nullo $\overline{0}$ è un insieme l.d. Se infatti, per fissare le idee, è $\overline{a}_1 = \overline{0}$ nella combinazione lineare*

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n$$

basterà scegliere $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ perché si abbia $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{0}$, cioè un insieme di vettori l.d.

Teorema 55 *Se e solo se n vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ sono l.d. almeno uno di essi può esprimersi come combinazione lineare dei rimanenti.*

Dim.
(necessità) Dati i vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n \in \mathbb{R}^m$, se esiste almeno un k ($1 \leq k \leq n$) per il quale si abbia

$$\overline{a}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{n} \lambda_i \overline{a}_i \tag{7}$$

allora i vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ sono l.d.

Infatti, la (7) può scriversi come

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_{k-1}\overline{a}_{k-1} + (-1)\overline{a}_k + \lambda_{k+1}\overline{a}_{k+1} + ... + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{0}$$

cioè come una combinazione lineare dei vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, con coefficienti non tutti nulli (il coefficiente di $\overline{a}_k$ è infatti -1), uguale al vettore nullo. Ne consegue che i vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ sono l.d.
(sufficienza) Dati gli n vettori l.d. $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, esiste almeno un k $(1 \leq k \leq n)$ per il quale si ha la (7).

Infatti, poiché per ipotesi gli n vettori sono l.d., vale la

$$\alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_k\overline{a}_k + ... + \alpha_n\overline{a}_n = \overline{0}$$

con almeno un $\alpha_i \neq 0$ $(i = 1, ..., n)$. Supponiamo che sia $\alpha_k \neq 0$ $(1 \leq k \leq n)$ Allora, dividendo tutti gli scalari per α_k si ha

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\overline{a}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\overline{a}_2 + ... + \overline{a}_k + ... + \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\overline{a}_n = \overline{0}$$

da cui segue immediatamente

$$\overline{a}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\overline{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\overline{a}_2 - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\overline{a}_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\overline{a}_{k+1} ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\overline{a}_n = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{n} \frac{-\alpha_i}{\alpha_k}\overline{a}_i$$

cioè il vettore $\overline{a}_k$ può ottenersi come combinazione lineare (con pesi pari a $\lambda_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}$, $\lambda_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_k}$, ... , $\lambda_{k-1} = -\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}$, $\lambda_{k+1} = -\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}$, ... , $\lambda_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_k}$) dei rimanenti vettori (*c.v.d.*).

Osservazione 56 *Poiché il teorema fornisce una condizione necessaria e sufficiente, esso costituisce una definizione equivalente di vettori l.d.*

Definizione 57 (Vettori linearmente indipendenti) *n vettori $(n \geq 2)$ $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$ si dicono* ***linearmente indipendenti*** *(l.i.) se l'unica loro combinazione lineare uguale al vettore nullo si ottiene scegliendo tutti nulli gli n scalari $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.*

Esempio 58 *I vettori $\overline{e}^1 = [1, 0, 0]$, $\overline{e}^2 = [0, 1, 0]$ ed $\overline{e}^3 = [0, 0, 1]$ sono l.i. perché $\lambda_1\overline{e}^1 + \lambda_2\overline{e}^2 + \lambda_3\overline{e}^3 = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ ed il vettore $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ è uguale al vettore nullo se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.*

1.6 Interpretazione della dipendenza lineare per $\mathbb{R}^2$

Precisiamo il significato geometrico della nozione di dipendenza lineare nel caso di vettori di $\mathbb{R}^2$. Dati due vettori $\overline{a} = [a_1, a_2]$ e $\overline{b} = [b_1, b_2]$ con componenti non nulle, essi sono l.d. se e solo se risulta

$$a_1b_2 = a_2b_1 \qquad \left(\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}\right)$$

Infatti, per la definizione di dipendenza lineare si ha

$$\lambda_1[a_1, a_2] + \lambda_2[b_1, b_2] = [0, 0]$$

(con $\lambda_1 \neq 0$ o $\lambda_2 \neq 0$) ovvero

$$\begin{cases} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 = 0 \\ \lambda_1 a_2 + \lambda_2 b_2 = 0 \end{cases}$$

da cui, risolvendo

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{b_1}{a_1}\lambda_2 \\ \lambda_2(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \end{cases}$$

La seconda uguaglianza del sistema è verificata qualunque λ_2 se e solo se $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, cioè se $a_1 b_2 = a_2 b_1$ (ovvero se $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$)[4]. Ciò equivale ad affermare che i vettori dati sono proporzionali; infatti, se $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ si ha $b_1 = \lambda a_1$ e $b_2 = \lambda a_2$, cioè $\lambda = \frac{b_1}{a_1}$ ma anche $\lambda = \frac{b_2}{a_2}$ da cui segue ovviamente $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$, cioè $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Geometricamente, la dipendenza lineare tra vettori di $\mathbb{R}^2$ si traduce nel richiedere che i vettori stessi appartengano ad una stessa retta.

Dimostriamo ora due teoremi sulla dipendenza lineare.

Teorema 59 *Sia $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ un insieme di vettori l.i. di $\mathbb{R}^m$. Allora anche un suo qualsiasi sottoinsieme proprio è l.i.*

Dim. (per assurdo)
Indichiamo con S l'insieme degli n vettori dati, sia cioè $S = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$, e con $S' \subset S$ un suo sottoinsieme proprio. Supponiamo, senza perdita di generalità, che $S' = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_h\}$, $h < n$. Se i primi h vettori degli n dati fossero l.d. si avrebbe

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \overline{a}_i = \overline{0} \qquad \text{con almeno un } \lambda_i \neq 0$$

ma allora, ponendo $\lambda_{h+1}, \lambda_{h+2}, ..., \lambda_n = 0$ risulterebbe

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{a}_i = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \overline{a}_i + \sum_{i=h+1}^{n} \lambda_i \overline{a}_i = \overline{0}$$

Pertanto, se i vettori $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_h\}$ fossero l.d. esisterebbe una combinazione lineare degli n vettori dati, con coefficienti non tutti nulli, uguale al vettore nullo. In altri termini, gli n vettori $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ sarebbero anch'essi l.d., ciò che è escluso dall'ipotesi.

Teorema 60 *Sia $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ un insieme di vettori l.d. di $\mathbb{R}^m$. Allora anche un qualsiasi insieme di vettori contenente l'insieme $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ è l.d.*

[4] Evidentemente se i vettori sono linearmente indipendenti si avrà $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

Dim.

Sia $S = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ ed $S' = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, \overline{a}_{n+1}, \overline{a}_{n+2}, ..., \overline{a}_{n+k}\}\}$ (evidentemente, per $k > 0$, $S \subset S'$). Occorre dimostrare che se S è un insieme di vettori l.d. tale è anche S'. Per ipotesi dunque è

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{a}_i = \overline{0} \quad \text{con almeno un } \lambda_i \neq 0$$

ma la combinazione lineare degli $n + k$ vettori, ove si scelgano i coefficienti $\lambda_{n+1} = \lambda_{n+2} = ... = \lambda_{n+k} = 0$ può scriversi come

$$\sum_{i=1}^{n+k} \lambda_i \overline{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{a}_i + \sum_{i=n+1}^{n+k} \lambda_i \overline{a}_i = \overline{0}$$

cioè la combinazione lineare degli $n + k$ vettori è uguale al vettore nullo con almeno un $\lambda_i \neq 0$. Ne consegue che l'insieme S' è costituito da vettori l.d.

Introduciamo ora una nozione fondamentale: quella di base di uno spazio vettoriale.

Definizione 61 (Base) *Gli n vettori l.i. $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ prendono il nome di* ***base dello spazio*** *$\mathbb{R}^m$ se ogni vettore $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$ può essere espresso come loro combinazione lineare (si dice anche che $\mathbb{R}^m$ è* ***generato*** *dai vettori della base).*

Esempio 62 *Consideriamo, nello spazio $\mathbb{R}^n$, gli n vettori fondamentali*

$$\overline{e}^1 = [1, 0, ..., 0, 0], \overline{e}^2 = [0, 1, ..., 0, 0], ..., \overline{e}^{n-1} = [0, 0, ..., 1, 0] \ , \ \overline{e}^n = [0, 0, ..., 0, 1].$$

Sappiamo che tali vettori sono l.i. perché

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overline{e}^i = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n] = \overline{0} \quad \textit{se e solo se } \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

Osserviamo anche che un arbitrario vettore di $\mathbb{R}^n$, sia $\overline{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]$, può scriversi come

$$\overline{x} = x_1 \overline{e}^1 + x_2 \overline{e}^2 + ... + x_n \overline{e}^n$$

cioè come combinazione lineare degli n vettori $\overline{e}^1, \overline{e}^2, ..., \overline{e}^n$.

Pertanto l'insieme $\{\overline{e}^1, \overline{e}^2, ..., \overline{e}^n\}$ costituisce una base (anche detta ***base fondamentale*** *o* ***canonica****) per $\mathbb{R}^n$.*

Osservazione 63 *Si noti che la base fondamentale è solo una delle possibili (infinite) basi di uno spazio vettoriale. E' evidente che, fissata una base, un generico vettore dello spazio potrà scriversi come combinazione lineare dei vettori della base con pesi che* ***dipendono*** *dagli stessi vettori della base. Così, ad esempio, se in $\mathbb{R}^2$ si fissa la base data dai vettori $\overline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ e $\overline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, il generico vettore $\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ potrà scriversi come*

$$\overline{x} = \frac{x_1 b_2 - x_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \overline{a} + \frac{a_1 x_2 - a_2 x_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \overline{b} \tag{8}$$

essendo evidentemente $\frac{x_1 b_2 - x_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ *e* $\frac{a_1 x_2 - a_2 x_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ *i coefficienti della combinazione lineare. Così, se i vettori della base sono* $\overline{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *e* $\overline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ *il vettore* $\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ *è esprimibile come*

$$\overline{x} = (-3x_1 - x_2)\overline{a} + (-x_2 - 2x_1)\overline{b}.$$

Si osservi che la quantità che figura al denominatore della (8), essendo $\overline{a}$ *e* $\overline{b}$ *linearmente indipendenti, è non nulla (si veda in proposito quanto già discusso in relazione all'interpretazione della dipendenza lineare per* $\mathbb{R}^2$*).*

Osservazione 64 *Siano* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m$ *m vettori l.i. dello spazio* $\mathbb{R}^m$ *tali che ogni vettore di* $\mathbb{R}^m$ *possa ottenersi come loro combinazione lineare. E' evidente che se gli m vettori* $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m\}$ *generano* $\mathbb{R}^m$ *(sono cioè una base per* $\mathbb{R}^m$*) allora anche l'insieme* $\{\overline{b}, \overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m\}$ *(essendo* $\overline{b}$ *distinto dai generatori* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m$*) genera* $\mathbb{R}^m$*.*

Pertanto, se esiste un insieme di vettori che genera $\mathbb{R}^m$*, esistono quanti si vogliono insiemi di vettori che hanno la stessa proprietà. Considerando dunque che esistono infiniti insiemi di vettori in grado di generare per combinazione lineare uno spazio* $\mathbb{R}^m$*, la domanda che sorge è la seguente:* ***quanti vettori deve contenere il più piccolo insieme in grado di generare*** $\mathbb{R}^m$*? In altri termini, quanti vettori sono necessari e sufficienti per generare l'intero* $\mathbb{R}^m$*? E' chiaro che i vettori di tale insieme devono essere l.i. perché, se fossero l.d., almeno uno di essi potrebbe esprimersi come combinazione lineare dei rimanenti. D'altro canto nessuno dei vettori l.i. dell'insieme potrebbe essere tolto perché se lo si eliminasse, essendo l.i. dagli altri, non lo si potrebbe esprimere come combinazione lineare dei rimanenti (e dunque non tutti i vettori di* $\mathbb{R}^m$ *sarebbero generati dall'insieme ottenuto eliminando un vettore l.i. dagli altri). Pertanto* ***tutte le basi dello spazio vettoriale*** $\mathbb{R}^m$ ***sono composte da*** m ***vettori.*** *Più precisamente, si ha la seguente*

Definizione 65 (Rango) *Se in uno spazio vettoriale si possono determinare* ***al più*** *m vettori l.i. in grado di generare per combinazione lineare tutti i vettori dello spazio si dirà che m è il* ***rango*** *(o la* ***dimensione****) dello spazio.*

Osservazione 66 *Si osservi che, mentre la rappresentazione dei vettori di* $\mathbb{R}^m$ *dipende dai vettori che formano la base, la dimensione di* $\mathbb{R}^m$ *non dipende da come si scelgono gli m vettori l.i. della base.*

Si è osservato in precedenza che qualsiasi vettore può scriversi come combinazione lineare dei vettori della base, con pesi che dipendono dagli stessi vettori della base. E' di fondamentale importanza osservare che, una volta fissata la base, la rappresentazione di un generico vettore è unica, come dimostra il seguente

Teorema 67 *Dato lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^m$ *e una sua base costituita dai vettori* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m$, *il generico vettore* $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$ *può esprimersi* ***in modo univoco*** *come combinazione lineare dei vettori della base.*

Dim. (per assurdo)

Neghiamo la tesi, supponendo per assurdo che i vettori della base ammettano *due distinte* rappresentazioni del generico vettore $\overline{x} \in \mathbb{R}^m$. Siano

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \alpha_1\overline{a}_1 + \alpha_2\overline{a}_2 + ... + \alpha_m\overline{a}_m \quad \text{e} \\ \overline{x} &= \beta_1\overline{a}_1 + \beta_2\overline{a}_2 + ... + \beta_m\overline{a}_m \end{aligned}$$

tali rappresentazioni; evidentemente, affinché le due rappresentazioni siano distinte, deve essere $\alpha_k \neq \beta_k$ (equivalentemente $\alpha_k - \beta_k \neq 0$) per almeno un k (con $k = 1, 2, ..., m$). Sottraendo m.a.m. si ha

$$\overline{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\overline{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\overline{a}_2 + ... + (\alpha_m - \beta_m)\overline{a}_m$$

Pertanto esisterebbe una combinazione lineare dei vettori della base, con coefficienti non tutti nulli, uguale al vettore nullo; in altri termini, i vettori della base formerebbero un insieme l.d., ciò che è per definizione impossibile. Dalla contraddizione, segue immediatamente la tesi del teorema (c.v.d.).

Riformulata nei termini appena visti la nozione di dimensione di uno spazio vettoriale, è possibile precisare ulteriormente la relazione che esiste tra *dipendenza lineare* e *dimensione dello spazio*, generalizzando un risultato già dedotto (v. §1.6) nel caso dello spazio vettoriale di dimensione 2 (per il quale si è già osservato che la dipendenza lineare tra vettori di $\mathbb{R}^2$ si traduce nel richiedere che i vettori stessi appartengano ad una medesima retta). Più in generale vale il seguente

Teorema 68 *Condizione necessaria e sufficiente affinché* n *vettori in* $\mathbb{R}^m$ *siano l.d. è che esista un sottospazio vettoriale di dimensione minore di* n *che li contiene.*

Osservazione 69 *Dal teorema segue immediatamente, come caso particolare, che condizione necessaria e sufficiente affinché due vettori di* $\mathbb{R}^m$ *siano linearmente dipendenti è che appartengano entrambi ad uno spazio vettoriale di dimensione 1 (cioè abbiano la stessa direzione).*

Osservazione 70 *Ancora, condizione necessaria e sufficiente affinché tre vettori dello spazio* $\mathbb{R}^m$ *siano linearmente dipendenti è che appartengano tutti ad uno stesso spazio di dimensione 1 o di dimensione 2 (appartengano cioè ad una stessa retta o ad uno stesso piano).*

Esempio 71 *Se i tre vettori* $\overline{a}$, $\overline{b}$ *e* $\overline{c}$ *sono l.d., supponendo che non siano tutti nulli, si potrà esprimerne uno come combinazione lineare dei rimanenti due, cioè p.es.*

$$\overline{c} = \lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b}.$$

Se $\overline{a}$ *e* $\overline{b}$ *sono l.i. (cioè se, da un punto di vista geometrico, essi individuano un piano) poiché* $\lambda_1\overline{a}$ *e* $\lambda_2\overline{b}$ *appartengono allo stesso piano, anche la loro somma appartiene allo stesso piano (Fig. 11).*

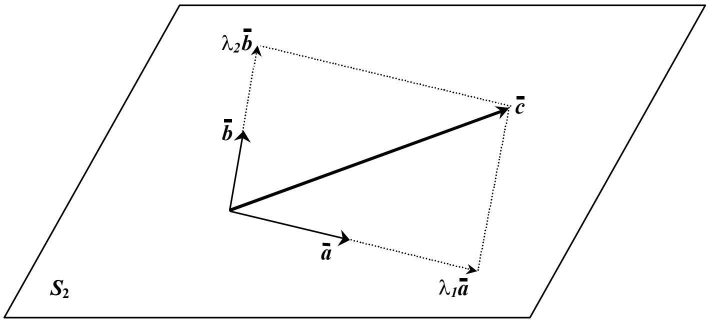

Figura 11

Dimostriamo ora il seguente

Teorema 72 (fondamentale degli spazi lineari) *Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$, esistono infinite m-ple di vettori l.i. mentre più di m vettori sono necessariamente l.d.*

Dim.

Dimostriamo anzitutto che esistono infinite basi.

Consideriamo l'arbitrario vettore non nullo di $\mathbb{R}^m$ $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ e l'insieme $B = \{\overline{x}, \overline{e}^1, \overline{e}^2 ..., \overline{e}^m\}$. Poiché B contiene come sottoinsieme una base, cioè l'insieme $\{\overline{e}^1, \overline{e}^2 ..., \overline{e}^m\}$, tutti i vettori di $\mathbb{R}^m$ possono esprimersi come combinazione lineare degli $m+1$ vettori dell'insieme B. Tuttavia B è un insieme di vettori l.d. in quanto $\overline{x}$ stesso può esprimersi come combinazione lineare dei vettori fondamentali, essendo

$$\overline{x} = x_1\overline{e}^1 + x_2\overline{e}^2 + ... + x_k\overline{e}^k + ... + x_m\overline{e}^m. \tag{9}$$

D'altro canto, poiché $\overline{x}$ è per ipotesi non nullo, almeno una delle sue componenti è diversa da 0. Supponiamo che sia $x_k \neq 0$, con $1 \leq k \leq m$. Ne consegue che $\overline{e}^k$ potrà scriversi come

$$\overline{e}^k = \frac{1}{x_k}\overline{x} - \frac{x_1}{x_k}\overline{e}^1 - ... - \frac{x_{k-1}}{x_k}\overline{e}^{k-1} - \frac{x_{k+1}}{x_k}\overline{e}^{k+1} - ... - \frac{x_m}{x_k}\overline{e}^m$$

cioè come combinazione lineare degli m vettori $\overline{x}, \overline{e}^1, ..., \overline{e}^{k-1}, \overline{e}^{k+1}, ..., \overline{e}^m$ ($\overline{e}^k$ è dunque l.d. da tali vettori).

Sia $B' = \{\overline{x}, \overline{e}^1, ..., \overline{e}^{k-1}, \overline{e}^{k+1}, ..., \overline{e}^m\}$ l'insieme di m vettori che si ottiene eliminando $\overline{e}^k$ da B. Per dimostrare che tale insieme è una nuova base per $\mathbb{R}^m$, occorre stabilire che B': (a) è un insieme di vettori l.i.; (b) è in grado di generare per combinazione lineare tutti i vettori di $\mathbb{R}^m$.

(a) B' è un insieme di vettori l.i.

Procediamo per assurdo, assumendo che vettori di B' siano l.d. Poiché $\overline{e}^1, ..., \overline{e}^{k-1}, \overline{e}^{k+1}, ..., \overline{e}^m$ sono tra loro l.i., solo $\overline{x}$ può essere l.d. dai rimanenti, cioè dovrebbe aversi

$$\overline{x} = \lambda_1\overline{e}^1 + \lambda_2\overline{e}^2 + ... + \lambda_{k-1}\overline{e}^{k-1} + \lambda_{k+1}\overline{e}^{k+1} + ... + \lambda_m\overline{e}^m \tag{10}$$

Sottraendo membro a membro la (10) dalla (9) si ha

$$\overline{0} = (x_1 - \lambda_1)\overline{e}^1 + ... + (x_{k-1} - \lambda_{k-1})\overline{e}^{k-1} + x_k\overline{e}^k + \\ + (x_{k+1} - \lambda_{k+1})\overline{e}^{k+1} + ... + (x_m - \lambda_m)\overline{e}^m.$$

I coefficienti del secondo membro non sono tutti nulli perché, per ipotesi, è almeno $x_k \neq 0$. Pertanto i vettori $\overline{e}^1, \overline{e}^2, ..., \overline{e}^m$ sarebbero l.d., ciò che è manifestamente assurdo. Ne consegue che l'insieme di vettori B' è l.i.

(b) B' è in grado di generare per combinazione lineare tutti i vettori di $\mathbb{R}^m$.

Per dimostrare ciò è sufficiente osservare che l'insieme B' è stato ottenuto eliminando dall'insieme B un vettore l.d. ($\overline{e}^k$). Pertanto, essendo B in grado di generare $\mathbb{R}^m$ (B contiene infatti la base canonica di $\mathbb{R}^m$) anche B' conserva tale proprietà.

Potendo ripetere tale procedimento infinite volte, scegliendo ogni volta un qualsiasi vettore non nullo di $\mathbb{R}^m$, si è dimostrato che esistono infinite m-ple di vettori l.i. che generano $\mathbb{R}^m$ (esistono cioè infinite basi).

Per dimostrare che $m + 1$ (o più) vettori di $\mathbb{R}^m$ sono *necessariamente* l.d. è sufficiente provare che qualsiasi m-pla di vettori l.i. è una base per $\mathbb{R}^m$. Infatti, se gli m vettori dell'insieme $\Lambda = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m\}$ formano una base, per definizione qualsiasi altro vettore $\overline{a}$ di $\mathbb{R}^m$ è esprimibile come loro combinazione lineare e pertanto l'insieme $\{\overline{a}, \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m\}$ sarà l.d. (e lo stesso sarà qualsiasi insieme di vettori contenente l'insieme Λ).

Pertanto, dato l'insieme di vettori l.i. $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m\}$, si ottiene una nuova base di $\mathbb{R}^m$ sostituendo nella base canonica $\{\overline{e}^1, \overline{e}^2 ..., \overline{e}^m\}$ uno dei vettori dell'insieme $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m\}$; questo procedimento può essere poi ripetuto (il fatto che i vettori $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m$ siano l.i. consente di affermare che di volta in volta il procedimento sostituirà un diverso vettore fondamentale) fino a scrivere la nuova base, formata per l'appunto dai vettori dell'insieme $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m\}$.

Osservazione 73 *Si osservi che la definizione di rango può essere riformulata in modo equivalente come segue: dato l'insieme di vettori* $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ *di* $\mathbb{R}^m$, *il rango* (*indichiamolo con* p) *è il numero massimo di vettori l.i. che possono essere estratti dall'insieme considerato. Dimostrato il teorema fondamentale è immediato constatare che* p (*evidentemente non negativo*) *non può superare né la dimensione dello spazio* (m) *né - ovviamente - il numero* n *dei vettori dell'insieme. Pertanto* $0 \leq p \leq \min\{n, m\}$ *con* $p = 0$ *se e solo se* $\overline{a}_1 = \overline{a}_2 = ... = \overline{a}_n = \overline{0}$.

Osserviamo inoltre che se:

1. $p = n$, *gli* n *vettori sono l.i. e generano pertanto un sottospazio di* $\mathbb{R}^m$ *di dimensione* n;
2. $p < n$, *gli* n *vettori sono l.d. ma* p *di essi sono l.i.; pertanto gli* n *vettori appartengono tutti ad un sottospazio di* $\mathbb{R}^m$ *di dimensione* p.

Alla luce di tale osservazione, la nozione di rango è fondamentale per delineare uno schema risolutivo dell'equazione vettoriale

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{b}. \tag{11}$$

Infatti, il vettore $\overline{b}$ è esprimibile come combinazione lineare dei vettori $\overline{a}_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ *se e solo se* appartiene al sottospazio di $\mathbb{R}^m$ da questi generato, cioè *se e solo se* il rango dell'insieme $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ è uguale a quello dell'insieme $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, \overline{b}\}$.

E' necessario a questo punto distinguere due casi:

1. i vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$ (equivalentemente, il loro rango è n). In questa eventualità, *la soluzione dell'equazione vettoriale (11) è unica.*

   Infatti, procedendo secondo lo schema dimostrativo del teorema 67, se $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{b}$ e $\lambda_1'\overline{a}_1 + \lambda_2'\overline{a}_2 + ... + \lambda_n'\overline{a}_n = \overline{b}$ fossero entrambe soluzioni della (11) (essendo distinte dovrebbe aversi $\lambda_k \neq \lambda_k'$ per almeno un k) allora, sottraendo m.a.m., si avrebbe $(\lambda_1 - \lambda_1')\overline{a}_1 + (\lambda_2 - \lambda_2')\overline{a}_2 + ... + (\lambda_n - \lambda_n')\overline{a}_n = \overline{0}$. Esisterebbe pertanto una combinazione lineare dei vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ con coefficienti non tutti nulli uguale al vettore nullo; in altri termini $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ sarebbero l.d., ciò che è negato dall'ipotesi essendo $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ una base di $\mathbb{R}^n$.

2. i vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ sono l.d. e solo p di essi sono l.i. (equivalentemente, il loro rango è $p < n$). *In questo caso, le soluzioni dell'equazione (11) sono* ∞^{n-p}.

   Infatti, senza perdita di generalità e con il solo scopo di evitare inutili appesantimenti nella notazione, possiamo supporre che i vettori l.i. siano i primi p. La (11) potrà quindi scriversi come $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_p\overline{a}_p = \overline{b} - (\lambda_{p+1}\overline{a}_{p+1} + ... + \lambda_n\overline{a}_n)$. Denotando sinteticamente il vettore $\overline{b} - (\lambda_{p+1}\overline{a}_{p+1} + ... + \lambda_n\overline{a}_n)$ come $\overline{b'}$ si ha $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_p\overline{a}_p = \overline{b'}$. Essendo i vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_p$ *l.i.* per ipotesi, una volta fissati gli $n - p$ scalari $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, ..., \lambda_n$, la rappresentazione del vettore $\overline{b'}$ è unica (v. teorema 67). Poiché si ha una soluzione per ogni arbitraria scelta degli $n - p$ scalari, le soluzioni sono infinite, più precisamente ∞^{n-p}.

I casi sopra analizzati trovano una sintesi nel seguente

Teorema 74 (di Rouchè-Capelli, in forma vettoriale) *Condizione necessaria e sufficiente perché l'equazione vettoriale*

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{b} \qquad (12)$$

abbia soluzioni è che il rango p dell'insieme incompleto $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ sia uguale al rango dell'insieme completo $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, \overline{b}\}$.

Osservazione 75 *Considerata l'equivalenza – più volte richiamata – tra l'equazione vettoriale (12) ed il sistema*

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + ... + a_{1n}\lambda_n = b_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + ... + a_{2n}\lambda_n = b_2 \\ \quad ... \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + ... + a_{mn}\lambda_n = b_m \end{cases} \qquad (13)$$

formato da m equazioni in n incognite, il teorema di Rouché-Capelli fornisce una condizione necessaria e sufficiente per la determinazione delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari del tipo (13).

Il teorema di Rouchè-Capelli si particolarizza quando il numero dei vettori (o, se si vuole, delle incognite dell'equazione (12)) è uguale alla dimensione dello spazio vettoriale, cioè se $n = m$ e $\overline{a}_i \in \mathbb{R}^m$ (per $i = 1, 2, ..., n$). In tal caso si ha il seguente

Teorema 76 (di Cramer) *Condizione necessaria e sufficiente perché l'equazione vettoriale*

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_n\overline{a}_n = \overline{b} \qquad \text{con } \overline{a}_i \in \mathbb{R}^n \quad (\text{per } i = 1, 2, ..., n)$$

abbia una ed una sola soluzione è che il rango p sia uguale a n.

Infatti se il rango $p = n$, cioè se i vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ sono l.i., per il teorema 67 la rappresentazione del vettore $\overline{b}$ per mezzo della combinazione lineare dei vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ è unica. Viceversa, se gli n vettori fossero l.d. essi individuerebbero un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (che, in quanto tale, avrebbe dimensione inferiore ad n) e pertanto il vettore $\overline{b} \in \mathbb{R}^n$ non potrebbe essere espresso come loro combinazione lineare.

Osservazione 77 *Se l'equazione vettoriale $\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+...+\lambda_n\overline{a}_n = \overline{b}$ ammette soluzioni essa di dice **compatibile; incompatibile** se non ammette soluzioni ed **indeterminata** se ne ammette infinite.*

2 Matrici

Le definizioni ed i teoremi sinora enunciati hanno consentito di costruire uno schema risolutivo per equazioni vettoriali del tipo (12). Per rendere lo schema operativo, resta tuttavia da chiarire come determinare concretamente il massimo numero di vettori linearmente indipendenti estraibili da un certo insieme; in altri termini, occorre precisare come calcolare il rango p di un insieme di n vettori di $\mathbb{R}^m$ (con riferimento a questo, per il momento sappiamo solo che deve essere $0 \leq p \leq \min(m, n)$).

A tal fine, considerando che nella (12) (o, equivalentemente, nel (13)) il rango dell'insieme $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ dipende dai vettori $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m1} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{m2} \end{bmatrix}$, ...,

$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{mn} \end{bmatrix}$ e che questi possono essere accostati per formare una tabella di m righe ed n colonne, è utile introdurre la nozione di *matrice*, a partire dalla quale è possibile costruire un'algebra, in modo analogo a quanto visto per i vettori.

Definizione 78 (Matrice) *Prende il nome di* ***matrice*** *di ordine $m \times n$ una tabella di elementi (di natura qualsiasi) ordinatamente disposti su m righe ed n colonne.*

Notazione 79 *Designeremo le matrici con le lettere maiuscole* **A**, **B**, *... o, laddove possano sorgere equivoci, scrivendole per esteso utilizzando una delle seguenti notazioni:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \quad o \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad o$$

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

o, in modo sintetico, $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i=1,...,m;j=1,...,n}$
oppure, $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|_{i=1,...,m;j=1,...,n}$

Si osservi che, nella notazione seguita, il primo indice denota la riga ed il secondo la colonna (l'elemento a_{ij} è dunque quello che nella matrice **A** *occupa la i-esima riga e la j-esima colonna).*

Notazione 80 *A volte indicheremo la matrice composta da m righe ed n colonne con il pedice $m \times n$, cioè $\mathbf{A}_{m \times n}$ o $\|a_{ij}\|_{m \times n}$.*

Se $m \neq n$ la matrice si dice **rettangolare**; è detta invece **quadrata** se $m = n$. In una matrice quadrata di ordine n gli elementi a_{ii} $(i = 1, 2, ..., n)$ costituiscono la **diagonale principale**, mentre gli elementi $a_{i,n-i+1}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ costituiscono la **diagonale secondaria**.

Osservazione 81 *Il vettore riga $\overline{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]$ è una matrice di ordine $1 \times n$. Analogamente, il vettore colonna $\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ è una matrice di ordine $m \times 1$.*

Pertanto, una matrice di ordine $m \times n$ può pensarsi ottenuta dall'accostamento di m vettori riga (di $\mathbb{R}^n$) oppure di n vettori colonna (di $\mathbb{R}^m$).

Definizione 82 (Trasposizione) *Prende il nome di* ***trasposizione*** *l'operazione unaria che trasforma la matrice* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *nella matrice* $\mathbf{A}^T_{n\times m}$*, ottenuta scambiando le righe e le colonne della matrice* $\mathbf{A}$*.*

Notazione 83 *Indichiamo la matrice trasposta della matrice* $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$*, con il simbolo* $\mathbf{A}^T$ *o* $\mathbf{A}'$*.Pertanto,* $\mathbf{A}^T=[a_{ji}]_{n\times m}$*.*

Osservazione 84 *Dalla definizione segue immediatamente che* $\left(\mathbf{A}^T\right)^T=\mathbf{A}$

Esempio 85 *Sia* $\mathbf{A}=\left\Vert \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \right\Vert$*. La matrice trasposta* $\mathbf{A}^T=\left\Vert \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{array} \right\Vert$.

Definizione 86 (Matrice orlata) *Data la matrice* $\mathbf{A}_{m\times n}$*, prende il nome di* ***matrice orlata*** *la matrice ottenuta accostando alla matrice* $\mathbf{A}$ *una riga o una colonna o entrambe (rispettivamente si avrà una matrice orlata* $\widetilde{\mathbf{A}}_{(m+1)\times n}$*,* $\widetilde{\mathbf{A}}_{m\times(n+1)}$ *o* $\widetilde{\mathbf{A}}_{(m+1)\times(n+1)}$*).*

Esempio 87 *Data* $\mathbf{A}=\left\Vert \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right\Vert$*, la matrice* $\widetilde{\mathbf{A}}=\left\Vert \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right\Vert$ *è l'orlata di* $\mathbf{A}$ *per accostamento di una riga (quella i cui elementi sono* $1,1,2$*).*

Definizione 88 (Matrice nulla) *Prende il nome di* ***matrice nulla****, e la si indica con* $\mathbf{O}$*, la matrice i cui elementi sono tutti zero.*

Definizione 89 (Matrice diagonale) *Prende il nome di* ***matrice diagonale*** *la matrice quadrata i cui elementi, ad eccezione di quelli posti sulla diagonale principale, sono tutti nulli.*

Esempio 90 *La matrice* $\mathbf{D}=\left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$ *è diagonale.*

Definizione 91 (Matrice identica) *Prende il nome di* ***matrice identica*** *(o* ***unità****), e la si indica con* $\mathbf{I}$ *(o* $\mathbf{I}_n$ *quando è utile sottolinearne l'ordine) la matrice diagonale i cui elementi non nulli sono tutti uguali a uno.*

Esempio 92 *La* $\mathbf{I}=\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ *è la matrice identica di ordine* 3.

Osservazione 93 *Si noti che la matrice identica può pensarsi come ottenuta dall'accostamento dei vettori fondamentali* $\overline{e}^i$ $(i = 1, 2, ..., n)$*. Cioè:*

$$\mathbf{I}_n = \left[\begin{array}{cccc} \overline{e}^1 & \overline{e}^2 & ... & \overline{e}^n \end{array} \right] \quad \text{se } \overline{e}^i \text{ sono vettori colonna}$$

oppure

$$\mathbf{I_n} = \left[\begin{array}{c} \overline{e}^1 \\ \overline{e}^2 \\ \vdots \\ \overline{e}^n \end{array} \right] \quad \text{se } \overline{e}^i \text{ sono vettori riga}$$

Definizione 94 (Matrice simmetrica) *Prende il nome di* ***matrice simmetrica*** *la matrice* $\mathbf{A}$ *(ovviamente quadrata) tale che* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$*.*

Esempio 95 *La matrice* $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{array} \right]$ *è uguale alla matrice* $\mathbf{A}^T$ *e pertanto è simmetrica.*

Definizione 96 (Uguaglianza tra matrici) *Due matrici* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *si dicono* ***uguali****, e si scrive* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$*, se* $a_{ij} = b_{ij}$ *per* $i = 1, 2, ..., n$ *e* $j = 1, 2, ..., m$*.*

Osservazione 97 *Si osservi che, in base alla definizione data, condizione necessaria affinché le matrici* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *siano uguali è che esse siano dello stesso ordine.*

Definizione 98 (Somma di matrici) *Date le matrici* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$*, entrambe dello stesso ordine* $(m \times n)$*, si definisce loro* ***somma*** *la matrice*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} := [a_{ij} + b_{ij}] \quad \text{per } i = 1, 2, ..., m; \; j = 1, 2, ..., n$$

Osservazione 99 *Si può facilmente verificare che* $(\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T) = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$

Esempio 100 *Date le matrici* $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{array} \right]$ *e* $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \end{array} \right]$,

la matrice somma è $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$.

Definizione 101 (Prodotto di uno scalare per una matrice) *Data la matrice* A *di ordine* $m \times n$ *e lo scalare* λ*, prende il nome di* ***prodotto*** *dello scalare* λ *per la matrice* $\mathbf{A}$ *la matrice*

$$\lambda \mathbf{A} := [\lambda a_{ij}]_{i=1,2,...,m; \; j=1,2,...,n}.$$

Esempio 102 *Dati lo scalare 2 e la matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$*, la matrice prodotto è* $2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -6 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$

Definizione 103 (Moltiplicazione tra matrici) *Date le matrici* $\mathbf{A}$*, di ordine* $m \times n$*, e* $\mathbf{B}$*, di ordine* $n \times q$*, si definisce* ***prodotto delle matrici*** $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$*, e lo si indica con* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *(o* $\mathbf{AB}$*), la matrice* $\mathbf{C}$ *di ordine* $m \times q$ *il cui generico elemento* c_{ij} *è uguale al prodotto scalare della* i*-esima riga* $(i = 1, 2, ..., m)$ *della matrice* $\mathbf{A}$ *per la* j*-esima colonna* $(j = 1, 2, ..., q)$ *della matrice* $\mathbf{B}$*.*[5]*.*

Esempio 104 *Siano date le matrici* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$*. Essendo* $\mathbf{A}$ *di ordine* 3×2 *e* $\mathbf{B}$ *di ordine* 2×3*, le matrici* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *sono conformabili per moltiplicazione. E' pertanto calcolabile la matrice prodotto* $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$*. Ricordando la definizione di prodotto scalare (v.), il generico elemento di* $\mathbf{C}$ *è* $c_{ij} = \sum_{s=1}^{2} a_{is} b_{sj}$ $(i, j = 1, 2, 3)$*. Quindi*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 13 & 6 & -7 \\ 18 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

Osservazione 105 *Consideriamo la matrice* $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$*, di ordine* $m \times n$*, ed il vettore colonna* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$*. Stante l'Osservazione 81, il vettore* $\overline{x}$ *può essere interpretato come una matrice di ordine* $n \times 1$ *e pertanto* $\mathbf{A}$ *e* $\overline{x}$ *risultano conformabili per moltiplicazione. Il risultato del prodotto* $\mathbf{A}\overline{x}$ *è una matrice di ordine* $m \times 1$*, cioè un vettore (indichiamolo con* $\overline{b}$*) dello spazio* $\mathbb{R}^m$*. Cioè*

$$\mathbf{A}\overline{x} = \overline{b} \quad , \quad \text{con } \overline{b} \in \mathbb{R}^m. \tag{14}$$

Svolgendo il primo membro della (14) si ha

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

da cui, uguagliando

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

[5] Il fatto che il numero delle colonne della matrice $\mathbf{A}$ sia uguale al numero delle righe della matrice $\mathbf{B}$ si esprime affermando che le matrici $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono **conformabili** per moltiplicazione. Si osservi che l'operazione di moltiplicazione tra matrici è definita *solo* tra matrici conformabili.

ovvero

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

cioè un sistema di m equazioni lineari in n incognite. Si osservi pertanto che un sistema di equazioni lineari può essere equivalentemente formulato sia nella forma vettoriale (v., in particolare (5) e (6)) sia nella forma matriciale (14).

Osservazione 106 *Sempre che entrambi i prodotti siano definiti (ovvero, nella definizione data di moltiplicazione tra matrici, quando $m = q$), si osservi che generalmente è $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (in altri termini, per la moltiplicazione tra matrici* ***non*** *vale la proprietà commutativa). Per sottolineare ciò, con riferimento al prodotto $\mathbf{AB}$ si suole affermare che $\mathbf{A}$ è* ***post-moltiplicata*** *per $\mathbf{B}$; viceversa, nel prodotto $\mathbf{BA}$ la matrice $\mathbf{A}$ è* ***pre-moltiplicata*** *per $\mathbf{B}$. Un esempio è il seguente:*

$$\text{date le matrici } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$\text{la matrice prodotto } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{bmatrix}$$

$$\text{mentre la matrice prodotto } \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32} \end{bmatrix}.$$

Si osservi che $\mathbf{AB}_{3\times 3}$ mentre $\mathbf{BA}_{2\times 2}$. Pertanto $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, senza necessità di confrontare i singoli elementi delle due matrici prodotto.

Osservazione 107 *Si osservi che il prodotto di due matrici quadrate (ovviamente dello stesso ordine) è sempre definito.*

Osservazione 108 *Si osservi anche che la* ***legge di annullamento del prodotto***[6] *non vale per le matrici, nel senso che la matrice prodotto $\mathbf{O}$ può essere nulla (cioè avere tutti gli elementi pari a zero) pur non essendo nulla nessuna delle matrici che costituiscono i fattori della moltiplicazione. Per esempio, date le matrici*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice prodotto è

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 - 1\cdot 2 & 2\cdot 0 - 1\cdot 0 \\ 6\cdot 1 - 3\cdot 2 & 6\cdot 0 - 3\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}$$

Determinante di una matrice.

[6] Un prodotto è nullo se è nullo almeno uno dei suoi fattori.

Come è stato già più volte osservato la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$ può pensarsi come ottenuta per accostamento degli n vettori colonna $\overline{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{m2} \end{bmatrix}$, ..., $\overline{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{mn} \end{bmatrix}$ dello spazio $\mathbb{R}^m$ e pertanto l'equazione vettoriale

$$\overline{a}_1 x_1 + \overline{a}_2 x_2 + ... + \overline{a}_n x_n = \overline{b} \tag{15}$$

può scriversi equivalentemente come

$$\mathbf{A}\overline{x} = \overline{b} \tag{16}$$

avendo posto $\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ (si osservi che $\mathbf{A}$ e $\overline{x}$ sono conformabili per moltiplicazione, essendo $\mathbf{A}_{m\times n}$ e $\overline{x}$ un vettore colonna (cioè del tipo $n \times 1$) dello spazio $\mathbb{R}^n$). Il risultato della moltiplicazione è una matrice di ordine $m \times 1$, cioè un vettore dello spazio $\mathbb{R}^m$ (vettore che abbiamo indicato con $\overline{b}$).

Abbiamo anche già osservato che la (16) (e quindi la (15)) può a sua volta interpretarsi come il sistema di m equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Soffermiamoci sull'equivalenza tra la (15) e la (16). Il teorema di Rouchè-Capelli in forma vettoriale stabilisce che condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione vettoriale (15) abbia soluzioni è che il rango p dell'insieme $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ sia uguale al rango dell'insieme $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, \overline{b}\}$. Se $p = n$ la soluzione è unica. Ci chiediamo: data la rappresentazione (16) dell'equazione vettoriale (15), come è possibile stabilire qual è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che compongono la matrice $\mathbf{A}$? In altri termini, come stabilire qual è il rango dell'insieme $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ interpretato non già come insieme di vettori ma come matrice?

Tale domanda trova risposta nella nozione di **determinante** di una matrice quadrata. Vedremo infatti che ad ogni matrice quadrata è possibile associare un numero reale che prende il nome di determinante della matrice. Tale numero è fondamentale per stabilire se l'insieme dei vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ che compongono per accostamento la matrice $\mathbf{A}$ è linearmente dipendente o indipendente; definendo in maniera opportuna il determinante, si dimostra infatti che *condizione necessaria e sufficiente affinché n vettori di $\mathbb{R}^n$ siano l.d. è che sia nullo il determinante della matrice ottenuta per accostamento degli n vettori dati.*

Per definire il determinante in modo che esso sia nullo *se e solo se* i vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ sono linearmente dipendenti, partiamo dall'interpretazione geometrica della dipendenza lineare.

Iniziamo col considerare il caso di uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, nel quale siano dati i vettori $\overline{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ e $\overline{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$, che assumiamo essere linearmente indipendenti. Geometricamente ciò significa che i vettori $\overline{a}_1$ e $\overline{a}_2$ *non* giacciono sulla stessa retta; pertanto, l'area del parallelogramma di cui sono i lati è non nulla (mentre sarebbe nulla se $\overline{a}_1$ e $\overline{a}_2$ fossero linearmente dipendenti perché in questo caso il parallelogramma, come già osservato (cfr. Figg. 3 e 4), degenererebbe).

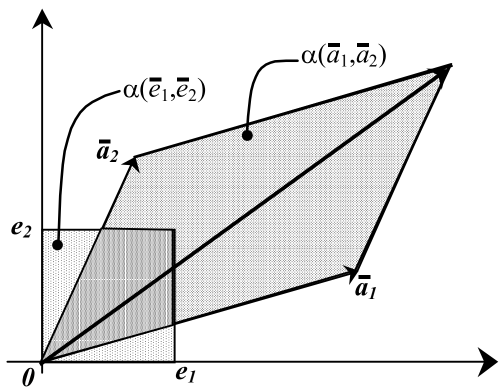

Figura 12

Fissiamo ora nel piano un'area unitaria (Fig. 12), data dall'area del quadrato – orientato in senso antiorario – di lati $\overline{e}^1$ ed $\overline{e}^2$; indichiamola con $\alpha(\overline{e}^1,\overline{e}^2)$. Sia invece $\alpha(\overline{a}_1, \overline{a}_2)$ l'area del parallelogramma (anch'esso orientato in senso antiorario) individuato dai vettori $\overline{a}_1$ ed $\overline{a}_2$. Sussiste la seguente relazione

$$\alpha(\overline{a}_1, \overline{a}_2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot \alpha(\overline{e}^1, \overline{e}^2) \tag{17}$$

Infatti, (v. Fig.13) il parallelogramma $OECB$ è equivalente al parallelogramma $DICB$ (entrambi hanno la stessa base $\overline{CB}$ e la stessa altezza). Ma il parallelogramma $DICB = MHCB - MHID$. Ancora, $MHCB$ è equivalente a $MGFB$ (hanno stessa base $\overline{MB}$ e stessa altezza $\overline{BF}$) e l'area di $MGFB$ è pari a $\overline{MG} \times \overline{MB} = a_{11} \times a_{22}$; d'altro canto $MHID$ è equivalente a $OMHE$, che a sua volta è equivalente a $LGHE$, la cui area è $\overline{LG} \times \overline{LE} = a_{12} \times a_{21}$. Quindi, l'area del parallelogramma $DICB = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Poiché, come già visto, il parallelogramma $DICB$ è equivalente al parallelogramma $OECB$, si conclude che l'area di quest'ultimo, a meno del fattore $\alpha(\overline{e}^1, \overline{e}^2)$ (che vale uno, essendo l'area unitaria fissata), è proprio $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

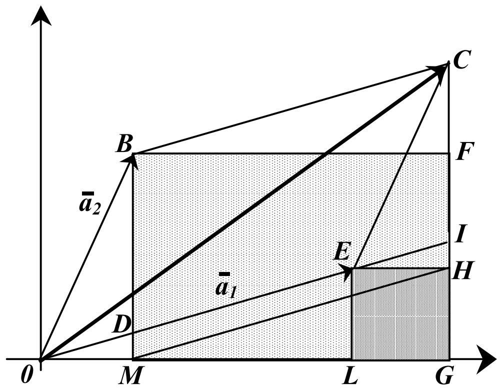

Figura 13

Osserviamo che la quantità $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ vale zero *se e solo se* i vettori $\overline{a}_1$ e $\overline{a}_2$ giacciono sulla stessa retta (in questo caso, e solo in questo, il parallelogramma $OECB$ degenera) e ciò si verifica *se e solo se* $\overline{a}_1$ e $\overline{a}_2$ sono linearmente dipendenti.

Ripetendo questa interpretazione geometrica per uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ (Fig. 14), nel quale siano dati i vettori $\overline{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$ e $\overline{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$, si ha

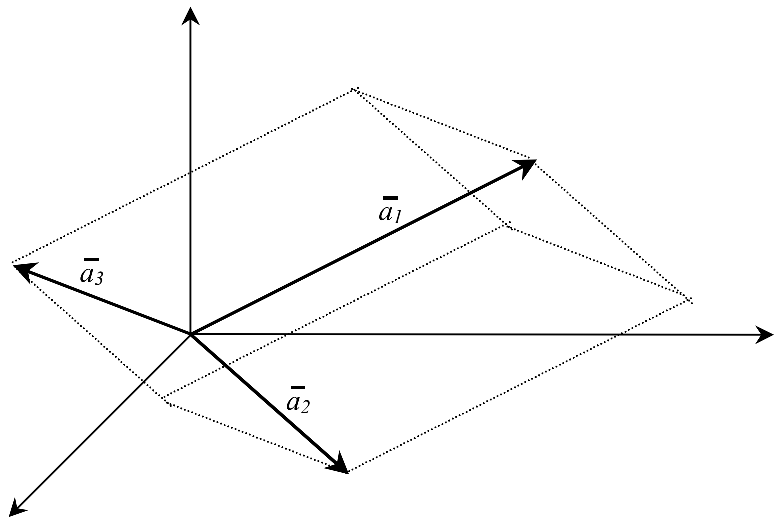

Figura 14

$$\begin{aligned} \alpha(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3) \quad &= \quad (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ &\quad -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}) \cdot \alpha(\overline{e}^1, \overline{e}^2, \overline{e}^3) \end{aligned} \tag{18}$$

dove con $\alpha(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3)$ si è denotato il volume dell'esaedro individuato, in $\mathbb{R}^3$, dai vettori $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ e $\overline{a}_3$. Tale volume è nullo *se e solo se* i tre vettori giacciono o su uno stesso piano o, addirittura, su una stessa retta (cioè *se e solo se* i tre vettori sono linearmente dipendenti).

Se ripetessimo il procedimento per $\mathbb{R}^4$ (spazio per il quale viene meno la possibilità di rappresentazione geometrica), troveremmo che il volume dell'iperprisma di $\mathbb{R}^4$ individuato dai vettori $\overline{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}$, $\overline{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix}$, $\overline{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{bmatrix}$ e $\overline{a}_4 = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{bmatrix}$ è dato da

$$\begin{aligned} \alpha(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4) = & (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + \\ & + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + \\ & + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + \\ & + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} + \\ & - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + \\ & - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + \\ & - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + \\ & - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}) \cdot \alpha(\overline{e}^1, \overline{e}^2, \overline{e}^3, \overline{e}^4) \end{aligned} \tag{19}$$

Al solito, tale volume è nullo *se e solo se* i quattro vettori appartengono tutti a $\mathbb{R}^3$ o a $\mathbb{R}^2$ o a $\mathbb{R}^1$ (cioè *se e solo se* i vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$ e $\overline{a}_4$ sono linearmente dipendenti).

Potremmo continuare a ripetere questo procedimento per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ qualsiasi ma – come si sarà notato – aumenterebbe vertiginosamente il numero di addendi che definiscono la quantità $\alpha(\cdot)$.

Cosa hanno in comune la (17), la (18) e la (19) ?

Prima di rispondere apriamo una parentesi

Consideriamo n numeri interi $a_1, a_2, ..., a_n$; essi si dicono disposti secondo l'**ordine naturale** se $a_1 < a_2 < ... < a_n$, cioè se ognuno di essi è inferiore a tutti i seguenti. Prende invece il nome di **permutazione** ogni loro riordinamento. Per esempio, dati i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (disposti in ordine naturale), una loro permutazione è 2, 1, 3, 4, 5, 6, 7; un'altra permutazione è, p.es., 1, 3, 5, 2, 4, 6, 7. Si noti che una permutazione può contenere più di un'**inversione**, laddove per inversione intendiamo il numero delle coppie di elementi - anche non adiacenti - per le quali la prima componente è maggiore della seconda. Così, nella permutazione 1, 3, 5, 2, 4, 6, 7 le inversioni sono tre, e precisamente (3, 2), (5, 2), e (5, 4). Una permutazione si dice **di ordine pari** se è pari il numero di inversioni che presenta; viceversa, è detta **di ordine dispari**. Com'è noto, le permutazioni di n elementi sono $n(n-1)... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Ora siamo in grado di comprendere cosa accomuna la (17), la (18) e la (19) e, più in generale, la quantità $\alpha(\cdot)$ calcolata in uno spazio $\mathbb{R}$ di dimensione qualsiasi. Anzitutto (ed è questo il punto essenziale) $\alpha(\cdot)$ è una quantità nulla *se e solo se* i vettori che compongono per accostamento la matrice $\mathbf{A}$ sono linearmente dipendenti; osserviamo poi che, a meno del fattore $\alpha(\overline{e}^1, \overline{e}^2, ..., \overline{e}^n)$:

a) per $\mathbb{R}^2$, $\alpha(\overline{a}_1, \overline{a}_2)$ è la somma algebrica di $2 = 2 \cdot 1 = 2!$ addendi;

per $\mathbb{R}^3$, $\alpha(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3)$ è la somma algebrica di $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ addendi;
per $\mathbb{R}^4$, $\alpha(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4)$ è la somma algebrica di $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ addendi;
In generale, $\alpha(\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n)$, a meno del fattore $\alpha(\overline{e}^1, \overline{e}^2, ..., \overline{e}^n)$, sarà pari alla somma algebrica di $n!$ addendi (tante sono infatti le permutazioni semplici di n elementi);

b) Denotata con $\mathbf{A}$ la matrice ottenuta per accostamento dei vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ...,$ $\overline{a}_n$, ciascun addendo (contenente uno ed un solo elemento proveniente da ciascuna riga ed un solo elemento proveniente da ciascuna colonna) è ottenuto a partire dal prodotto degli elementi che occupano la diagonale principale $(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$ nel seguente modo: si fissano i primi indici e si permutano i secondi indici in tutti i modi possibili, assegnando al prodotto così ottenuto segno positivo se la permutazione è di ordine pari e segno negativo se la permutazione è di ordine dispari[7].

Così, p.es., la quantità $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$ ha segno positivo poiché presenta, nei secondi indici, 4 inversioni (esse sono $(4, 2)$, $(4, 1)$, $(4, 3)$ e $(2, 1)$); viceversa, la quantità $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$ ha segno negativo in quanto presenta, nei secondi indici, 3 inversioni (cioè $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$).

Quindi, a meno del fattore di proporzionalità $\alpha(\overline{e}^1, \overline{e}^2, ..., \overline{e}^n)$, la quantità $\alpha(\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n)$ è definita dalla somma algebrica di $n!$ addendi; questi rappresentano tutte le permutazioni dei secondi indici degli elementi che formano la diagonale principale della matrice $\mathbf{A}$ (ottenuta per accostamento dei vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$) (il segno dipendendo dall'ordine della permutazione). A questo punto, generalizzando le osservazioni a) e b), siamo in grado di dare la seguente

Definizione 109 (Determinante) *Prende il nome di* ***determinante*** *della matrice quadrata* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *di ordine* n*, e lo si indica con* $\det(\mathbf{A})$ *o con* $|\mathbf{A}|$*, il numero*

$$\sum (\pm)\, a_{1k_1} a_{2k_2} a_{3k_3} ... a_{nk_n} \tag{20}$$

essendo la somma relativa a tutte le $n!$ *permutazioni* $(k_1, k_2, ..., k_m)$ *degli interi* $1, 2, ..., n$ *prese con segno positivo se la permutazione è di ordine pari e con segno negativo se essa è di ordine dispari*[8]*.*

[7] In modo equivalente, il determinante della matrice $\mathbf{A}$ potrebbe essere calcolato fissando i secondi indici e permutando i primi indici ed attribuendo agli addendi il segno in rapporto all'ordine (pari o dispari) della permutazione.

[8] Un'altra possibilità per introdurre la nozione di determinare è dovuta a K. Weierstrass (qui la segnaliamo solo per completezza): consiste nel definire il determinante della matrice $\mathbf{A}$ in termini *assiomatici* come una funzione a valori reali, definita sull'insieme delle matrici quadrate, *multilineare* ed *antisimmetrica* rispetto alle colonne di $\mathbf{A}$ che assume valore 1 in corrispondenza delle matrici identiche di ordine qualsiasi.

Ricapitolando: a meno del fattore di proporzionalità $\alpha(\overline{e}^1, \overline{e}^2, ..., \overline{e}^n)$, la quantità $\alpha(\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n)$ può interpretarsi come volume dell'iperprisma individuato da n vettori di $\mathbb{R}^n$; tale volume è evidentemente non nullo *se e solo se* i vettori sono linearmente indipendenti. Poiché il determinante di una matrice quadrata $\mathbf{A}$ ottenuta dall'accostamento dei vettori $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ è stato definito in modo che coincida con $\alpha(\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n)$ si può concludere che il determinante stesso è non nullo *se e solo se* sono linearmente indipendenti i vettori che compongono la matrice $\mathbf{A}$.

Abbiamo pertanto risposto alla domanda iniziale: data la rappresentazione (16) dell'equazione vettoriale (15), come è possibile stabilire se gli n vettori che compongono la matrice $\mathbf{A}$ sono linearmente dipendenti (o indipendenti)?

"Basterà" calcolare il determinante della matrice $\mathbf{A}$: se esso è nullo gli n vettori sono linearmente dipendenti; altrimenti sono linearmente indipendenti.

Pur essendo dedotta generalizzando gli esempi basati sull'interpretazione geometrica delle quantità (17), (18) e (19), la definizione 109 non si presta ad un agevole calcolo del determinante di una matrice $\mathbf{A}$ di ordine n. A tal fine è utile il *primo teorema di Laplace*, per illustrare il quale occorre preliminarmente chiarire le nozioni di minore complementare e di complemento algebrico.

Definizione 110 (Minore complementare) *Data la matrice quadrata $\mathbf{A}$, di ordine n e fissato un suo elemento qualsiasi a_{ij}, prende il nome di **minore complementare di** a_{ij}, e lo si indica con M_{ij}, il determinante della matrice di ordine $n-1$ ottenuta sopprimendo dalla matrice $\mathbf{A}$ la i-esima riga e la j-esima colonna.*

Esempio 111 *Data la matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, *il minore complementare dell'elemento a_{32} è il determinante della matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Definizione 112 (Complemento algebrico) *Prende il nome di **complemento algebrico** dell'elemento a_{ij}, e lo indichiamo con A_{ij}, il numero*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Osservazione 113 *Si osservi che il complemento algebrico A_{ij} coincide con il minore complementare se la somma degli indici $i + j$ è pari mentre è uguale all'opposto del minore complementare se la somma degli indici $i + j$ è dispari.*

Esempio 114 *Data la matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, *il complemento algebrico dell'elemento a_{32} (essendo $3 + 2 = 5$ e $(-1)^5 = -1$) è $-M_{ij}$, essendo M_{ij} il minore complementare dell'esempio 111.*

Ciò premesso, sussiste il seguente

Teorema 115 (Primo teorema di Laplace) *Il determinante di una matrice quadrata* $\mathbf{A}$ *di ordine* $n \geq 1$*è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una linea per i rispettivi complementi algebrici, cioè*

$$\det(A) = \begin{cases} a & , \quad \text{se } \mathbf{A} \text{ è di ordine 1} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} & , \quad \text{se } \mathbf{A} \text{ è di ordine } n > 1 \end{cases} \tag{21}$$

(o, equivalentemente)

$$\left(\det(A) = \begin{cases} a & , \quad \text{se } \mathbf{A} \text{ è di ordine 1} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{ki} & , \quad \text{se } \mathbf{A} \text{ è di ordine } n > 1 \end{cases} \right)$$

Osservazione 116 *Si osservi che l'indice i che figura nella* (*21*) *può essere un intero qualsiasi compreso tra* 1 *ed* n (*ordine della matrice* $\mathbf{A}$). *Inoltre, si noti che per calcolare il determinante di una matrice* (*quadrata*) *di ordine n si assume noto il complemento algebrico* A_{ik} $(k = 1, ..., n)$ *e dunque − in ultima analisi − il minore complementare dell'elemento* a_{ik} $(k = 1, ..., n)$, *cioè il determinante della matrice* (*quadrata*) *di ordine* $n - 1$ *ottenuta sopprimendo la i-esima riga e la k-esima colonna della matrice* $\mathbf{A}$. *In tal senso, il primo teorema di Laplace viene anche impiegato come definizione "costruttiva" del determinante, nel senso che, essendo per definizione a il determinante di una matrice di ordine* 1, *il determinante di una matrice di ordine n viene calcolato ricorsivamente a partire da a stesso.*

Esempio 117 *Data la matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *fissiamo la prima riga* (*cioè* $i = 1$) *e calcoliamo il det(*$\mathbf{A}$*). Dalla* (*21*) *si ha*

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} = \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + 3 \cdot (-1)^{1+2} M_{12} = \\ &= 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) = -5 \end{aligned}$$

Si osservi che lo stesso risultato si sarebbe ottenuto fissando anziché la prima riga la seconda (*oppure la prima o la seconda colonna*).

Osservazione 118 *L'esempio 117 consente di illustrare una semplice regola per il calcolo del determinante di una matrice del secondo ordine. Sia* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *una generica matrice di ordine* 2. *Poiché* $A_{11} = a_{22}$ *e* $A_{12} = -a_{21}$, *la* (*21*) *diviene*

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \tag{22}$$

Pertanto possiamo enunciare la seguente regola di validità generale: il ***determinante di una matrice del secondo ordine si ottiene calcolando il prodotto degli elementi sulla diagonale principale e sottraendo a questo il prodotto degli elementi della diagonale secondaria.***

Esempio 119 *Calcoliamo il determinante della matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.
Scegliendo la prima riga, dalla (21) si ha

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

osserviamo che A_{11}*,* A_{12} *e*A_{13} *sono i complementi algebrici di matrici di ordine due e pertanto possono essere calcolati con la regola prima definita. Si ha pertanto:*

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

Osservazione 120 (Regola di Sarrus) *Anche l'esempio 119 si presta a definire una regola mnemonica per il calcolo del determinante di una matrice del terzo ordine. Procediamo come segue: data la matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ *ripetiamo le prime due colonne, scrivendo*

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right|$$

Eseguiamo ora i prodotti degli elementi che giacciono su ciascuna delle frecce continue e sommiamo i risultati. Si ottiene:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}. \tag{23}$$

Eseguiamo ora i prodotti degli elementi che giacciono su ciascuna delle frecce tratteggiate e sommiamo i risultati. Si ottiene:

$$a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{24}$$

Eseguiamo ora la differenza tra la (23) e la (24). Si ottiene la

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

cioè la stessa quantità che, come è noto dall'esempio 119, fornisce il determinante della matrice $\mathbf{A}$*. Tale procedimento per il calcolo del determinante di una matrice del terzo ordine è noto come* ***regola di Sarrus****.*

Esempio 121 *Data la matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$*, calcoliamone il determinante mediante la regola di Sarrus. Ripetendo le prime due colonne si ha* $\left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -2 & 1 & 5 \end{array} \right|$*, da cui det(*$\mathbf{A}$*)* $= 2 \cdot (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 5 - (1) \cdot (-1) \cdot 1 - (2) \cdot 0 \cdot 5 - (0) \cdot 3 \cdot (-2) = 20.$

Proprietà dei determinanti

Elenchiamo ora alcune tra le principali proprietà dei determinanti omettendo le relative dimostrazioni, che possono per lo più dedursi dal legame già esplorato tra determinante e dipendenza (o indipendenza) lineare.

Con il termine *linea* si indicherà genericamente o una riga o una colonna.

1. Se sono nulli tutti gli elementi di una linea il determinante è nullo.
2. Se si scambiano due linee parallele il determinante cambia segno (ne consegue che se una linea viene spostata di k posizioni (verso l'alto o verso il basso se si tratta di una riga o verso sinistra o verso destra se si tratta di una colonna), il determinante risulta moltiplicato per $(-1)^k$).
3. Se due linee parallele sono uguali il determinante è nullo.
4. Se tutti gli elementi di una linea vengono moltiplicati per k il determinante risulta moltiplicato per k (ne consegue che se tutti gli elementi di una matrice quadrata di ordine n sono moltiplicati per k il determinante risulta moltiplicato per k^n)
5. Se una riga (colonna) è combinazione lineare di altre righe (colonne) il determinante è nullo.
6. La somma dei prodotti degli elementi di una linea per i complementi algebrici di una linea parallela alla prima è nulla (*secondo teorema di Laplace*).
7. Se ciascun elemento di una linea (sia, per fissare le idee, la k-esima) viene scritto come somma di s addendi, il determinante è uguale alla somma degli s determinanti relativi alle matrici la cui k-esima linea è data dall'addendo s-esimo della matrice di partenza.
8. Il valore del determinante non cambia se ad una linea di un determinante si aggiunge una combinazione lineare di linee ad essa parallele.
9. Il determinante di una matrice $\mathbf{A}$ ed il determinante della sua trasposta $\mathbf{A}^T$ sono uguali.

Anche procedendo secondo l'algoritmo definito dal primo teorema di Laplace, il calcolo del determinante può risultare particolarmente laborioso anche per ordini della matrice relativamente piccoli (p.es. già per $n = 5$ si deve procedere a calcolare la somma di cinque addendi in ognuno dei quali figura un determinante del quarto ordine, che a sua volta dà luogo alla somma di quattro addendi in ognuno dei quali figura un determinante del terzo ordine, calcolabile in modo relativamente rapido attraverso la regola di Sarrus).

In alcuni casi lo sviluppo del determinante può essere reso meno laborioso applicando il teorema di Kronecker, per illustrare il quale occorrono le definizioni di *minore di ordine k* e di *rango* (o *caratteristica*) di una matrice $\mathbf{A}$, che diamo di seguito.

Definizione 122 (Minore di ordine k) *Data la matrice $\mathbf{A}$ di ordine $m \times n$, prende il nome di* ***minore di ordine k*** *il determinante della matrice quadrata che si ottiene da $\mathbf{A}$ estraendone gli elementi comuni a k righe e k colonne (con $k = 1, 2, ..., \min(m, n)$).*

Esempio 123 *Data la matrice* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 8 \\ 4 & 7 & 9 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$*, un minore di ordine 2 è, p.es.,* $\begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -8$ *(si sono considerate la seconda e quarta riga e la seconda e terza colonna); un minore di ordine 3 è, p.es.,* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 9 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -46$ *(si sono considerate in questo caso la prima, terza e quarta riga e le tre colonne della matrice* $\mathbf{A}$*).*

Osservazione 124 *Osserviamo che da una matrice* $\mathbf{A}_{m\times n}$ *si possono estrarre* $\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{m!}{k!(m-k)!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}$ *minori di ordine* k *(con* $k = 1, 2, ..., \min(m, n)$*). Così, p.es., dalla matrice* $\mathbf{A}_{4\times 3}$ *si possono estrarre* 12 *minori di ordine* 1 *(i* 12 *elementi che compongono la matrice),* 18 *minori di ordine* 2 *e* 4 *minori di ordine* 3*.*

Esempio 125 *Data la matrice* $\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{Vmatrix}$ *i* 3 *minori di ordine* 2 *sono* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -2$.

Definizione 126 (Rango o caratteristica) *Data la matrice* $\mathbf{A}$*, di ordine* $m\times n$*, prende il nome di* ***rango*** *(o* ***caratteristica****) di* $\mathbf{A}$ *− e lo si indica con* $r(\mathbf{A})$ *− l'ordine massimo dei minori* ***non tutti nulli*** *estraibili dalla matrice* $\mathbf{A}$*.*

Osservazione 127 *Dalla definizione segue* $0 \leq r(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$*, con* $r(\mathbf{A}) = 0$ *se e solo se* $\mathbf{A} = \mathbf{O}$*. Si osservi inoltre che, perché il rango* $r(\mathbf{A})$ *sia uguale a* k *(con* $k \leq \min(m, n)$ *è sufficiente che* ***almeno uno*** *dei minori di ordine* k *−* ***e non tutti!*** *− sia diverso da zero.*

Esempio 128 *Data la matrice* $\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \end{Vmatrix}$*,* $r(\mathbf{A}) = 1$ *perché tutti i minori di ordine* 2 *sono nulli (infatti la seconda riga è uguale alla prima moltiplicata per tre).*

Esempio 129 *Data la matrice* $\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{Vmatrix}$*,* $r(\mathbf{A}) = 2$ *essendo* $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ *(non importa che sia* $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$*)*

Proprietà del rango

1. $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T)$ (il rango della matrice $\mathbf{A}$ coincide con quello della trasposta $\mathbf{A}^T$)

2. $r(\mathbf{AA}^T) = r(\mathbf{A})$ (moltiplicando una matrice per la sua trasposta il rango rimane immutato)

3. $r(\mathbf{AB}) \leq \min(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B}))$ (date due matrici conformabili per moltiplicazione il rango della matrice prodotto è non maggiore del minore dei ranghi delle due matrici date)

Teorema 130 (di Kronecker) *Condizione necessaria e sufficiente perché la matrice $\mathbf{A}_{m\times n}$ abbia rango $r(\mathbf{A}) = p$ è che:*
(a) un suo minore $\mathbf{D}$ di ordine p sia non nullo;
(b) siano nulli tutti gli $(m-p)\cdot(n-p)$ minori di ordine $p+1$ che si ottengono orlando $\mathbf{D}$ con una riga ed una colonna qualsiasi di $\mathbf{A}$.

Esempio 131 *Data la matrice* $\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 7 & 14 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 14 & 28 & 6 & 8 \end{Vmatrix}$ *procediamo a calcolarne il rango applicando il teorema di Kronecker.*

Anzitutto sarà $1 \leq r(\mathbf{A}) \leq 4$. Inoltre, il rango non può essere 1 perché esiste almeno un minore di ordine due diverso da zero (è, p.es., $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0$*). Consideriamo proprio il minore* $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ *e orliamolo in tutti i $(4-2)\cdot(4-2) = 2\cdot 2 = 4$ modi possibili; otteniamo i 4 minori del terzo ordine*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 14 & 3 & 4 \\ 8 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 28 & 6 & 8 \end{vmatrix} \quad , \quad D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 14 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

Osservando che $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 0$ deduciamo che il rango della matrice data è 2. Per giungere a tale conclusione è stato necessario calcolare 5 determinanti (diversamente, con lo sviluppo del determinante secondo il primo teorema di Laplace, si sarebbero dovuti calcolare un determinante del quarto ordine, $\binom{4}{3}\binom{4}{3} = 16$ determinanti del terzo ordine ed almeno un determinante del secondo ordine per pervenire allo stesso risultato).

Definizione 131.1 Sia **A** una matrice quadrata di ordine n, si dice che **A** è **invertibile** se esiste una matrice quadrata **B**, anche lei di ordine n, tale che valga $AB = BA = I_n$ con **I** matrice identica di ordine n. La matrice **B** è indicata con A^{-1} ed è chiamata **matrice inversa di A**.

Osservazione 131.2 Se esiste, l'inversa di **A** è unica. Infatti, per assurdo, siano **B** e **C** ambedue matrici inverse di **A**. Sfruttando le proprietà di moltiplicazione delle matrici e la definizione di inversa, si ha

$$B = B\, I_n = B\,(AC) = (B\, A)\, C = I_n\, C = C.$$

Proposizione 131.3 Data una matrice **A** di ordine n, si ha che:

a) Se A^{-1} esiste allora esiste anche l'inversa della matrice trasposta di **A** e vale

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T;$$

b) Se **A** è una matrice diagonale con elementi $a_{i,i}$ tutti diversi da 0 allora esiste la matrice inversa di **A**, anch essa diagonale, i cui elementi sulla diagonale principale sono dati dai valori $\dfrac{1}{a_{i,i}}$.

Se, invece, esiste qualche elemento sulla diagonale principale di **A** che è uguale a 0, la matrice **A** non è invertibile.

c) Sia data anche una matrice **B** di ordine n. Se esistono l'inversa di **A** e l'inversa di **B** allora esiste l'inversa di **AB** e risulta

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

Inoltre,

Teorema 131.4 Se esiste l'inversa della matrice **A** di ordine n allora risulta $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ e si ha che

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad .$$

Ripresa, ora, la definizione di complemento algebrico, si dice che

Definizione 131.5 Data la matrice **A** di ordine n, si chiama **matrice cofattore di A** - indicata con il simbolo **cof A** - quella i cui elementi sono costituiti dai complementi algebrici di quelli di **A**. In sintesi, con la notazione della definizione 112, si ha che

$$(\mathbf{cof\ A})_{i,j} = (-1)^{i+j}\, M_{i,j}\ .$$

E' verificato il seguente importante

Teorema 131.6 Se la matrice **A** di ordine n è tale che $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ allora esiste l'inversa di **A** e vale

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (cof \quad A)^T \quad .$$

Più in generale, si ha che

$$\mathbf{A}\ (\mathbf{cof\ A})^T = (\det \mathbf{A})\ \mathbf{I}_n\ .$$

Come conseguenza dei teoremi 131.4 e 131.6, risulta che

Teorema 131.7 Data una matrice **A** di ordine n, esiste la matrice inversa di **A** se e solo se $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Infine, premesso che

Definizione 131.8 Una matrice **A** di ordine n è detta **non singolare** se $\det(A) \neq 0$; altrimenti A è detta **singolare**,

si può allora rileggere il teorema 131.7 al seguente modo

Teorema 131.9 Una matrice **A** di ordine n è non singolare se e solo se esiste la matrice inversa di **A**.

A conclusione del presente capitolo, si consideri il seguente esempio che permette di determinare prima l'esistenza e poi gli elementi dell'inversa di una data matrice **A**.

Esempio 131.10 Sia $A := \begin{Vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$. Applicando la regola di

Sarrus, è subito visto che $\det(A) = 2$ e da ciò si deduce che la matrice **A** è invertibile. Inoltre, si ha

$$\text{cof}\, A = \begin{Vmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{Vmatrix} .$$

.

Da quanto appena calcolato, si ricava che

$(\text{cof} \quad A)^T = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{Vmatrix}$ ed, infine, che

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(cof \quad A)^T = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} \end{Vmatrix} .$$

Il lettore verifichi che $A \ A^{-1} = A^{-1} \ A = I_n$.

3 Sistemi di equazioni lineari

La teoria sin qui illustrata consente di risolvere sistemi di equazioni lineari del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{25}$$

dove i numeri reali a_{ij} $(i = 1, ..., m;\ j = 1, ..., n)$ sono detti **coefficienti**, b_i $(i = 1, ..., m)$ costituiscono i **termini noti** e le lettere $x_1, ..., x_n$ denotano le **incognite** del sistema.

Si è già più volte osservato che è equivalente scrivere il sistema (25) come equazione vettoriale

$$\overline{a}_1x_1 + \overline{a}_2x_2 + ... + \overline{a}_nx_n = \overline{b} \tag{26}$$

(avendo posto $\overline{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$, $(i = 1, ..., n)$ e $\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$) o, con notazione matriciale, come

$$\mathbf{A}\overline{x} = \overline{b} \tag{27}$$

(avendo posto $\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$).

L'equivalenza tra la (25), la (26) e la (27) permette di applicare alcuni risultati già noti (teorema di Rouché-Capelli, v.; determinante e rango di una matrice, v.) per risolvere il sistema lineare (25), cioè per determinare una n-pla di numeri reali $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ tali che $-$ sostituiti alle incognite $x_1, x_2, ..., x_n -$ verifichino le equazioni del sistema (25). Il sistema è detto **compatibile** se esiste *almeno* una soluzione (cioè una n-pla di numeri reali); in caso contrario è detto **incompatibile**. Nel caso di un sistema compatibile occorrerà anche calcolare il numero delle soluzioni.

Il teorema di Rouché-Capelli stabilisce che l'equazione vettoriale (26) è compatibile se il rango dell'insieme $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ è uguale al rango dell'insieme $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, \overline{b}\}$; poiché l'insieme di vettori $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n\}$ può essere interpretato come matrice $\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix}$, ottenuta per accostamento degli n vettori colonna $\overline{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$, $(i = 1, ..., n)$ e, analogamente, l'insieme di vettori $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n, \overline{b}\}$ può pensarsi come matrice $\mathbf{A}/\overline{b} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix}$, ottenuta per accostamento degli n vettori colonna $\overline{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ e del vettore $\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, si potrà equivalentemente affermare che *il sistema* (25) *è compatibile se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice ottenuta orlando la matrice dei coefficienti con il vettore dei termini noti*, cioè se

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}/\overline{b}).$$

Pertanto, per stabilire se il sistema (25) è o meno compatibile, si deve calcolare il rango della matrice $\mathbf{A}$ e confrontarlo con il rango della matrice $\mathbf{A}/\overline{b}$. Se i due ranghi coincidono, il sistema è compatibile; non è compatibile in caso contrario. Sia p il rango della matrice dei coefficienti, cioè $r(\mathbf{A}) = p$ (evidentemente $1 \leq p \leq \min\{m, n\}$). Ciò significa che dalla matrice $\mathbf{A}$ dei coefficienti è possibile estrarre *almeno un minore* non nullo di ordine p, essendo invece nulli (se esistono) tutti i minori di ordine $p+1$. Per fissare le idee, e senza perdita di generalità, supponiamo che tale minore sia quello formato dalle prime p righe e p colonne della matrice $\mathbf{A}$[9], cioè

$$\det \left(\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} \end{Vmatrix} \right) \neq 0 \tag{28}$$

A questo punto, possono verificarsi due casi:

1. $p = m$, cioè il rango della matrice dei coefficienti è uguale al numero delle equazioni del sistema (25), potendo essere $p = n$ o $p < n$ (ma non $p > n$ poiché $p \leq \min\{m, n\}$);

2. $p < m$, cioè il rango della matrice dei coefficienti è minore del numero delle equazioni del sistema (25), potendo essere $p = n$ o $p < n$.

Come si vedrà tra breve, nel primo caso il sistema è sempre compatibile, mentre nel secondo lo è solo se i termini noti verificano determinate condizioni. Esploriamo separatamente i due casi.

1. $p = m$.

[9] Se così non fosse, basterebbe effettuare opportuni scambi nell'ordine delle equazioni e delle incognite per ricadere nel caso che si è supposto.

a) $p = n$
Se oltre ad essere $p = m$ è anche $p = n$ il sistema (25) diviene

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{29}$$

cioè un sistema formato da n equazioni in n incognite, con $r(\mathbf{A}) = n$. Sussiste allora il seguente

Teorema 132 (di Cramer) *Il sistema (29) (in n equazioni ed n incognite), avente rango della matrice dei coefficienti pari ad n ha una ed una sola soluzione data dalla n-pla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dove*

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}} \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

essendo $\mathbf{A}$ la matrice dei coefficienti e $\mathbf{A}_i$ la matrice che si ottiene da $\mathbf{A}$ sostituendo la colonna dei termini noti nella i-esima colonna.

Per il teorema di Cramer quindi la soluzione del sistema (29) è data dalla n-pla

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}, ..., x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Esempio 133 *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} .$$

Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

Quindi, essendo det$(\mathbf{A}) = 18 \neq 0$, si ha $r(\mathbf{A}) = 3$. Poiché il sistema è di 3 equazioni in 3 incognite, per il teorema di Cramer la soluzione è unica ed è data dalla terna

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{18} = \frac{7}{9} \ , \ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{18} = \frac{4}{9} \ , \ x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{18} = -\frac{1}{3}$$

b) $p < n$
Se, sempre essendo $p = m$, è $p < n$ il sistema (25) diviene

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p + a_{1p+1}x_{p+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p + a_{2p+1}x_{p+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p + a_{pp+1}x_{p+1} + ... + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \tag{30}$$

cioè un sistema formato da p equazioni e da un numero n di incognite maggiore di p. In questo caso vale il seguente

Teorema 134 *Il sistema (30) ammette infinite soluzioni; queste si determinano fissando arbitrariamente i valori delle incognite* $x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n$ *e calcolando mediante il teorema di Cramer i valori delle incognite* $x_1, x_2, ..., x_p$.

Esempio 135 *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases} . \tag{31}$$

Osserviamo preliminarmente che il rango della matrice (3×4) *dei coefficienti è al massimo* 3. *Dalla matrice dei coefficienti possono essere estratti i* 4 *minori del terzo ordine*

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -15, \quad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 15$$

tutti non nulli (*in realtà basterebbe che almeno uno dei minori fosse non nullo; in particolare, senza necessità di ricalcolo, è certamente non nullo il minore* D_1, *già calcolato nel precedente esercizio*). *Fissando il minore* D_1, *formato dalle prime tre colonne della matrice dei coefficienti, possiamo riscrivere il sistema dato come*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 - 3x_4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 + x_4 \end{cases} . \tag{32}$$

Per il teorema 134, possiamo calcolare le (infinite) soluzioni del sistema (31) applicando al sistema (32) il teorema di Cramer. Avremo

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - x_4 & 1 & 3 \\ 2 - 3x_4 & 2 & -1 \\ -1 + x_4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{18} = -\tfrac{5}{6}x_4 + \tfrac{7}{9} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 - x_4 & 3 \\ 1 & 2 - 3x_4 & -1 \\ -1 & -1 + x_4 & 2 \end{vmatrix}}{18} = -\tfrac{5}{6}x_4 + \tfrac{4}{9}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 - x_4 \\ 1 & 2 & 2 - 3x_4 \\ -1 & 1 & -1 + x_4 \end{vmatrix}}{18} = \tfrac{1}{2}x_4 - \tfrac{1}{3} \qquad x_4 \quad \textit{qualunque}$$ [10]

Osserviamo che i valori delle incognite x_1, x_2 e x_3 dipendono dal valore di x_4; in altri termini, per ogni assegnazione di valore all'incognita x_4 restano determinati in corrispondenza i valori di x_1, x_2 e x_3. Poiché il valore x_4 può essere fissato ad arbitrio in infiniti modi, il sistema ha infinite soluzioni. In particolare, essendo le incognite 4 ed il rango 3, si dice che il sistema ha $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni. L'esponente del simbolo ∞ indica pertanto il numero di incognite che possono essere fissate arbitrariamente.

Sempre con riferimento all'esempio in questione, notiamo inoltre che se si fosse scelto un minore diverso (purché non nullo) le soluzioni sarebbero state diverse; così, scegliendo per esempio il minore D_2 (formato dalla prima, dalla seconda e dalla quarta colonna della matrice dei coefficienti) e procedendo in modo analogo si sarebbe dovuto applicare il teorema di Cramer al sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 1 - 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - x_4 = -1 - 2x_3 \end{cases}$$

ottenendo le soluzioni

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-3x_3 & 1 & 1 \\ 2+x_3 & 2 & 3 \\ -1-2x_3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-9} = -\frac{5}{3}x_3 + \frac{2}{9} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-3x_3 & 1 \\ 1 & 2+x_3 & 3 \\ -1 & -1-2x_3 & -1 \end{vmatrix}}{-9} = -\frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{9}$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1-3x_3 \\ 1 & 2 & 2+x_3 \\ -1 & 1 & -1-2x_3 \end{vmatrix}}{-9} = 2x_3 + \frac{2}{3} \qquad x_3 \quad \textit{qualunque.}$$

Ancora, scegliendo il minore D_3 si sarebbero avute le ∞^1 soluzioni

$$x_1 = x_2 + \frac{1}{3} \qquad x_3 = -\frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{15}$$

$$x_4 = -\frac{6}{5}x_2 + \frac{8}{15} \qquad x_2 \quad \textit{qualunque}$$

mentre scegliendo il minore D_4 si sarebbero avute le ∞^1 soluzioni

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{3} \qquad x_3 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{2}{15}$$

$$x_4 = -\frac{6}{5}x_1 + \frac{14}{15} \qquad x_1 \quad \textit{qualunque} \quad .$$

(*Verificare per esercizio*).

Osservazione 136 *Con notazione diversa, anziché scrivere "x qualunque", si è soliti scrivere più sinteticamente $x = \overline{x}$, dove la barra al di sopra della lettera x non va confusa con la notazione indicante un vettore. Nel seguito utilizzeremo tale scrittura per indicare l'attribuzione di un valore qualsiasi all'incognita.*

2. $p < m$.

In questo caso il sistema (25) diviene

$$\left\{\begin{array}{llllllll}
a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +...+ & a_{1,p}x_p & +a_{1,p+1}x_{p+1} & +...+ & a_{1,n}x_n & =b_1\\
a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +...+ & a_{2,p}x_p & +a_{2,p+1}x_{p+1} & +...+ & a_{2,n}x_n & =b_2\\
\vdots & \vdots & +...+ & \vdots & \vdots & +...+ & \vdots & \vdots\\
a_{p,1}x_1 & +a_{p,2}x_2 & +...+ & a_{p,p}x_p & +a_{p,p+1}x_{p+1} & +...+ & a_{p,n}x_n & =b_p\\
a_{p+1,1}x_1 & +a_{p+1,2}x_2 & +...+ & a_{p+1,p}x_p & +a_{p+1,p+1}x_{p+1} & +...+ & a_{p+1,n}x_n & =b_{p+1}\\
\vdots & \vdots & +...+ & \vdots & \vdots & +...+ & \vdots & \vdots\\
a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +...+ & a_{m,p}x_p & +a_{m,p+1}x_{p+1} & +...+ & a_{m,n}x_n & =b_m
\end{array}\right. \tag{33}$$

Evidentemente, se è anche $p = n$ il sistema (33) non conterrà le colonne dalla $(p+1)$-esima alla n-esima (cioè non figureranno le incognite $x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n$).

Il teorema di Rouché-Capelli stabilisce che, affinché il sistema (33) sia compatibile, occorre e basta che il rango della matrice dei coefficienti sia uguale al rango della matrice completa, quella cioè che si ottiene orlando la matrice dei coefficienti con il vettore dei termini noti. Ciò significa che il sistema (33) è compatibile se e solo se sono nulli tutti gli $m-p$ minori di ordine $p+1$ del tipo

$$\left|\begin{array}{lllll}
a_{1,1}x_1 & a_{1,2}x_2 & ... & a_{1,p}x_p & b_1\\
a_{2,1}x_1 & a_{2,2}x_2 & ... & a_{2,p}x_p & b_2\\
\vdots & \vdots & ... & \vdots & \vdots\\
a_{p,1}x_1 & a_{p,2}x_2 & ... & a_{p,p}x_p & b_p\\
a_{k,1}x_1 & a_{k,2}x_2 & ... & a_{k,p}x_p & b_k
\end{array}\right| \qquad (k = p+1, ..., m). \tag{34}$$

Esercizio 137 *Risolvere il sistema*

$$\left\{\begin{array}{l}
x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = -7\\
2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 11\\
4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = -3
\end{array}\right. .$$

Dalla matrice dei coefficienti

$$\mathbf{A} = \left\|\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & -1 & -5\\ 2 & 1 & 3 & 5\\ 4 & -3 & 1 & -5\end{array}\right\|$$

possono essere estratti i 4 *minori del terzo ordine*

$$D_1 = \left|\begin{array}{rrr} 1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 4 & -3 & 1\end{array}\right| = 0, \qquad D_2 = \left|\begin{array}{rrr} 1 & -2 & -5\\ 2 & 1 & 5\\ 4 & -3 & -5\end{array}\right| = 0$$

$$D_3 = \left|\begin{array}{rrr} 1 & -1 & -5\\ 2 & 3 & 5\\ 4 & 1 & -5\end{array}\right| = 0, \qquad D_4 = \left|\begin{array}{rrr} -2 & -1 & -5\\ 1 & 3 & 5\\ -3 & 1 & -5\end{array}\right| = 0$$

tutti nulli. Il rango è dunque certamente minore di 3*. In particolare, considerando il minore relativo alle prime due righe e due colonne, cioè*

$$\left|\begin{array}{rr} 1 & -2\\ 2 & 1\end{array}\right| = 1 + 4 = 5$$

si conclude che il rango della matrice dei coefficienti è 2, *cioè* $r(\mathbf{A}) = 2$. [11]

Consideriamo ora la matrice completa

$$\mathbf{A}/\overline{b} = \left\| \begin{array}{rrrrr} 1 & -2 & -1 & -5 & -7 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 11 \\ 4 & -3 & 1 & -5 & -3 \end{array} \right\|$$

il cui rango è certamente compreso tra 2 *e* 3. *Tra i minori del terzo ordine che si ottengono orlando il minore non nullo* $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, *l'unico da prendere in esame (v. la (34)) è*

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 2 & 1 & 11 \\ 4 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 88 + 42 + 28 + 33 - 12 = 0$$

che è anch'esso nullo. Si conclude che $r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 2$ *e pertanto il sistema ha* $\infty^{4-2} = \infty^2$ *soluzioni, che si ottengono eliminando la terza riga (il minore di ordine* 2 *non nullo preso in considerazione è dato dalle prime due righe e due colonne) e riscrivendo il sistema come*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -7 + x_3 + 5x_4 \\ 2x_1 + x_2 = 11 - 3x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

da cui, risolvendo con Cramer

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -7 + x_3 + 5x_4 & -2 \\ 11 - 3x_3 - 5x_4 & 1 \end{vmatrix}}{5} = -x_3 - x_4 + 3 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -7 + x_3 + 5x_4 \\ 2 & 11 - 3x_3 - 5x_4 \end{vmatrix}}{5} = -x_3 - 3x_4 + 5$$

$$x_3 = \overline{x}_3 \qquad x_4 = \overline{x}_4$$

Un modo diverso per comprendere perché la terza equazione del sistema possa essere omessa senza alterare la risoluzione del sistema stesso consiste nell'osservare che essa non aggiunge alcuna informazione alle prime due equazioni, essendo i suoi coefficienti ottenuti sommando i coefficienti della seconda equazione a quelli della prima moltiplicati per due.

Esercizio 138 *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} 3x_1 \quad - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_1 \quad + x_2 \quad - x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} .$$

[11] Alla stessa conclusione si sarebbe pervenuti considerando altri minori di ordine 2 estraibili dalla matrice $\mathbf{A}$. P.es.:

(prima e terza colonna, prima e seconda riga): $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5$;

(seconda e terza colonna, seconda e terza riga): $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 9 = 10$,

e così via.

Anche in questo caso, dalla matrice dei coefficienti

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{rrrr} 3 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right\|$$

possono essere estratti i 4 *minori del terzo ordine tutti nulli (verificare per esercizio applicando il teorema di Kronecker). In particolare, considerando il minore relativo alla seconda e terza riga ed alla seconda e terza colonna*

$$\left| \begin{array}{rr} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{array} \right| = 2 - 3 = -1$$

si conclude che è $r(\mathbf{A}) = 2$*.*

Dalla matrice completa

$$\mathbf{A}/\overline{b} = \left\| \begin{array}{rrrrr} 3 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right\|$$

consideriamo l'unico minore contenente i termini noti che orla il minore non nullo $\left| \begin{array}{rr} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{array} \right|$*. Si ha*

$$\left| \begin{array}{rrr} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| = -3 + 2 - 3 + 4 = 0$$

che è anch'esso nullo. Si conclude che $r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 2$ *e pertanto il sistema ha* $\infty^{4-2} = \infty^2$ *soluzioni, che si ottengono eliminando la prima riga e riscrivendo il sistema come*

$$\begin{cases} -2x_2 + 3x_3 = -4x_1 + 5x_4 \\ \quad x_2 \quad - x_3 = 1 + x_1 - 2x_4 \end{cases}$$

, Solution is : $\{x_3 = -2x_1 + x_4 + 2, x_2 = -x_1 - x_4 + 3\}$*da cui, risolvendo con Cramer*

$$x_2 = \frac{\left| \begin{array}{rr} -4x_1{+}5x_4 & 3 \\ 1 + x_1{-}2x_4 & -1 \end{array} \right|}{-1} = -x_1 - x_4 + 3 \qquad x_3 = \frac{\left| \begin{array}{rr} -2 & -4x_1{+}5x_4 \\ 1 & 1 + x_1{-}2x_4 \end{array} \right|}{-1} = -2x_1 + x_4 + 2$$

$$x_1 = \overline{x}_1 \qquad\qquad x_4 = \overline{x}_4.$$

Esercizio 139 *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}.$$

Dalla matrice dei coefficienti

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{rrrr} -1 & 5 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right\|$$

possono essere estratti i 4 *minori del terzo ordine tutti nulli (basta osservare che la terza riga è pari alla differenza tra la prima e la seconda). In particolare, considerando il minore relativo alla prima e seconda riga ed alla prima e seconda colonna*

$$\left| \begin{array}{rr} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = -2 - 5 = -7$$

si conclude che è $r(\mathbf{A}) = 2$.

Dalla matrice completa

$$\mathbf{A}/\overline{b} = \left\| \begin{array}{rrrrr} -1 & 5 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right\|$$

consideriamo il minore

$$\left| \begin{array}{rrr} -1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{array} \right| = -2 - 20 + 3 + 4 + 6 - 5 = -14$$

non nullo. Si conclude che $r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 3$. *Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema non è compatibile.*

Sistemi omogenei

Se il sistema (25) ha tutti i termini noti pari a zero, cioè se si presenta come

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. \qquad (35)$$

esso si dice **omogeneo**.

Si osservi che, essendo la matrice $\mathbf{A}/\overline{b}$ formata da una colonna di zeri (i termini noti del sistema), per i sistemi omogenei è comunque $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}/\overline{b})$, cioè il rango della matrice completa è uguale a quello della matrice dei coefficienti (prima proprietà dei determinanti). Per risolvere un sistema del tipo (35) occorrerà quindi prendere in considerazione solo il rango della matrice $\mathbf{A}$. Riguardo le soluzioni, è immediato osservare anche che un sistema omogeneo *è sempre compatibile* poiché una soluzione (detta **banale**) è sicuramente $x_1 = 0$, $x_2 = 0, ..., x_n = 0$. Ciò che è invece rilevante è stabilire se, oltre a quella banale, un sistema omogeneo presenti anche soluzioni diverse da quella banale (anche dette **soluzioni proprie**), cioè soluzioni costituite da n-ple di numeri *non tutti nulli.* Vale in proposito il seguente

Teorema 140 *Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema (35) abbia soluzioni diverse da quella banale è che il rango della matrice dei coefficienti sia minore del numero delle incognite, cioè* $r(\mathbf{A}) < n$. [12]

Dim.

(necessità) Dato il minore non nullo $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pp} \end{vmatrix}$, le soluzioni del sistema (35) si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p + a_{1,p+1}x_{p+1} + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p + a_{2,p+1}x_{p+1} + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{pp}x_p + a_{p,p+1}x_{p+1} + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Se $p = n$, per il teorema di Cramer, la soluzione è unica e non può che essere quella banale. Ne consegue che, affinché il sistema (35) abbia soluzioni non banali, è necessario che sia $p < n$.

(sufficienza) Se $p < n$, per determinare una soluzione è sufficiente assegnare alle $n - p$ incognite $x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n$ dei valori arbitrari (quindi non necessariamente tutti nulli) (c.v.d.)

Esercizio 141 *Risolvere il sistema*

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ -4 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \times (1 - 9 + 1 + 1 + 3 + 3) = 0$$

e pertanto il rango della matrice dei coefficienti è certamente minore di 3. *Il sistema ha dunque soluzioni diverse da quella banale. Per determinarle si noti che il minore formato dalle prime due righe e due colonne è diverso da zero, essendo*

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8.$$

Pertanto è $r(\mathbf{A}) = 2$.

Il sistema può quindi scriversi come

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 = -6x_3 \end{cases}$$

[12] Si osservi che, nel caso in cui $m = n$ il teorema si particolarizza come segue: *condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema omogeneo in n equazioni ed n incognite abbia soluzioni diverse da quella banale è che sia nullo il determinante della matrice dei coefficienti.*

e le $\infty^{3-2} = \infty^1$ *soluzioni sono*

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} -x_3 & 3 \\ -6x_3 & 2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-2x_3 + 18x_3}{-8} = -2x_3 \\
x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} -1 & -x_3 \\ 2 & -6x_3 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{6x_3 + 2x_3}{-8} = -x_3 \\
x_3 &= \overline{x}_3
\end{aligned}
$$

Esercizio 142 *Risolvere il sistema*

$$
\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} .
$$

Osserviamo che $r(\mathbf{A}) \leq 3$*, quindi il sistema ha certamente soluzioni non banali. Notiamo inoltre che tutti i* 4 *minori del terzo ordine sono nulli, in quanto i coefficienti della terza equazione sono pari alla somma dei coefficienti della prima equazione e della seconda equazione moltiplicati per due. Inoltre, almeno un minore del secondo ordine è diverso da zero, per esempio quello formato dalla prima e seconda riga e dalla terza e quarta colonna*

$$
\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.
$$

Pertanto $r(\mathbf{A}) = 2$*. Le* $\infty^{4-2} = \infty^2$ *soluzioni non banali possono essere calcolate scrivendo il sistema come*

$$
\begin{cases} x_3 + 3x_4 = 2x_1 - x_2 \\ x_4 = -3x_1 - 2x_2 \end{cases}
$$

da cui segue immediatamente

$$
x_4 = -3x_1 - 2x_2, \quad x_3 = 11x_1 + 5x_2, \quad x_1 = \overline{x}_1, \; x_2 = \overline{x}_2.
$$

Esercizio 143 *Risolvere il sistema*

$$
\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} .
$$

Osserviamo che $r(\mathbf{A}) = 3$ *essendo*

$$
\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 21 \neq 0.
$$

Pertanto, essendo $r(\mathbf{A}) = n$ *(numero delle incognite)* $= 3$*, il sistema presenta solo la soluzione banale, data dalla* $x_1 = 0$*,* $x_2 = 0$*,* $x_3 = 0$*.*

Sistemi parametrici

Sono detti **parametrici** i sistemi caratterizzati dalla presenza di uno o più parametri in almeno una delle equazioni. Per esempio è un *sistema parametrico* il seguente

$$\begin{cases} 3kx - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - kz = 2 \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

nel quale, oltre alle incognite x, y, z, compare il parametro k.

Risolvere un sistema parametrico significa determinare se esistono (e, in caso affermativo, quante e quali sono) le soluzioni del sistema al variare del parametro o dei parametri. Così, nell'esempio appena visto, il minore di ordine tre estraibile dalla matrice dei coefficienti è

$$\begin{vmatrix} 3k & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -k \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6k^2 + 29k + 13$$

e, per determinare il rango di $\mathbf{A}$, occorre discutere la $6k^2+29k+13 \neq 0$. Poiché $6k^2 + 29k + 13 = 0$ per $k = -\frac{13}{3}$ e $k = -\frac{1}{2}$ si avrà

$$\begin{aligned} r(\mathbf{A}) &= 3 \quad \text{per} \quad k \neq -\frac{13}{3} \ \text{ e } \ k \neq -\frac{1}{2} \\ r(\mathbf{A}) &< 3 \quad \text{per} \quad k = -\frac{13}{3} \ \text{ o } \ k = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

In particolare, osservando che il minore $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ indipendentemente dai valori che il parametro k può assumere, per $k = -\frac{13}{3}$ o $k = -\frac{1}{2}$ il rango di $\mathbf{A}$ è 2.

Quindi, per $k \neq -\frac{13}{3}$ e $k \neq -\frac{1}{2}$, essendo $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 3$, il sistema ha un'unica soluzione, determinabile applicando il teorema di Cramer

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -k \\ 2k & 2 & 3 \end{vmatrix}}{6k^2 + 29k + 13} = \frac{4k^2 - 4k + 25}{6k^2 + 29k + 13} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 3k & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -k \\ 1 & 2k & 3 \end{vmatrix}}{6k^2 + 29k + 13} = \frac{6k^3 + 21k - 8}{6k^2 + 29k + 13} \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} 3k & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2k \end{vmatrix}}{6k^2 + 29k + 13} = \frac{18k^2 - 4k - 3}{6k^2 + 29k + 13}. \end{aligned}$$

Per $k = -\frac{13}{3}$ il sistema diventa

$$\begin{cases} -13x - 2y + \phantom{\frac{13}{3}}z = 1 \\ 2x + 3y + \frac{13}{3}z = 2 \\ x + 2y + \phantom{\frac{1}{3}}3z = -\frac{26}{3} \end{cases}$$

ed essendo

$$\begin{vmatrix} -13 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -\frac{26}{3} \end{vmatrix} = \frac{1057}{3} \neq 0$$

il rango della matrice completa è 3. Poiché il rango della matrice dei coefficienti è 2, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è incompatibile.

Per $k = -\frac{1}{2}$ il sistema diventa

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}x - 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + \frac{1}{2}z = 2 \\ x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

ed essendo

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

il rango della matrice completa è 3. Poiché il rango della matrice dei coefficienti è 2, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è incompatibile.

Esempio 144 (15.07.99) *Determinare per quali valori del parametro k il seguente sistema ammette soluzioni e calcolarle*

$$\begin{cases} -kx + z = 0 \\ x + (k-2)y - 3z = -2 \\ kx + (2-k)y + z = 2 \end{cases}$$

Il sistema è in tre equazioni e tre incognite. Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti. E'

$$\begin{vmatrix} -k & 0 & 1 \\ 1 & k-2 & -3 \\ k & 2-k & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2.$$

Essendo $k^2 - 3k + 2 \neq 0$ per $k \neq 1$ e $k \neq 2$, si ha

$$k \neq 1 \;\; e \;\; k \neq 2\,, \qquad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \; soluzione$$

che determiniamo applicando il teorema di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & k-2 & -3 \\ 2 & 2-k & 1 \end{vmatrix}}{k^2 - 3k + 2} = \frac{2k - 4 - 2k + 4}{k^2 - 3k + 2} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -k & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ k & 2 & 1 \end{vmatrix}}{k^2 - 3k + 2} = \frac{2k + 2 + 2k - 6k}{(k-1)(k-2)} = -\frac{2}{k-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -k & 0 & 0 \\ 1 & k-2 & -2 \\ k & 2-k & 2 \end{vmatrix}}{k^2 - 3k + 2} = \frac{-2k^2 + 4k - 4k + 2k^2}{k^2 - 3k + 2} = 0$$

Per $k = 1$ il sistema diviene

$$\begin{cases} -x \quad + \quad z = 0 \\ x - y - 3z = -2 \\ x + y \quad + z = 2 \end{cases} .$$

Tutti i quattro minori del terzo ordine estraibili dalla matrice completa sono tutti nulli, essendo la terza riga combinazione lineare delle prime due (i coefficienti della terza riga si ottengono sottraendo i coefficienti della seconda ai corrispondenti coefficienti della prima riga moltiplicati per -2). E' immediato osservare che è $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 2$, essendo per esempio non nullo il minore di ordine 2 formato dalle prime due righe e dalle prime due colonne della matrice $\mathbf{A}$ $\left(\text{cioè} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\right)$. Pertanto il sistema è compatibile e presenta $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Poiché il minore non nullo è stato individuato scegliendo le prime due righe e le prime due colonne possiamo tralasciare – nella discussione del sistema – la terza equazione ed assegnare un valore qualsiasi all'incognita z. Il sistema può cioè scriversi come

$$\begin{cases} -x \qquad = -z \\ x - y \quad = -2 + 3z \\ \qquad z = \overline{z} \end{cases}$$

da cui seguono immediatamente le ∞^1 soluzioni

$$x = z, \quad y = -2z + 2, \quad z = \overline{z}$$

Per $k = 2$ il sistema diviene

$$\begin{cases} -2x \ + z = 0 \\ x - 3z = -2 \\ 2x + \ z = 2 \end{cases}$$

Il rango della matrice dei coefficienti è 2. Il rango della matrice completa è

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 4 - 4 - 2 = 2.$$

Essendo $r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{A}/\overline{b})$, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è incompatibile.

Esempio 145 (01.07.99) *Determinare per quali valori del parametro k il seguente sistema ammette soluzioni e calcolarle*

$$\begin{cases} -kx + y = 0 \\ 2x - ky = k \\ -8x + 2ky = 0 \end{cases}$$

Il sistema è in tre equazioni e due incognite e, per $k = 0$, è immediato osservare che diventa un sistema omogeneo che dà luogo alla sola soluzione (banale) $x = 0$, $y = 0$. Per $k \neq 0$ il sistema non è omogeneo. Poiché il sistema è in tre equazioni *e due incognite procediamo a calcolare dapprima il rango della matrice completa. Si ha*

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 0 \\ 2 & -k & k \\ -8 & 2k & 0 \end{vmatrix} = 2k^3 - 8k = 2k(k^2-4)$$

Pertanto il rango della matrice completa è 3 *per* $2k(k^2-2) \neq 0$*, cioè per* $k \neq 0$ *e per* $k \neq \pm 2$*. Poiché il rango della matrice dei coefficienti è sicuramente minore di* 3 *per* $k \neq 0$ *e* $k \neq \pm 2$ *il sistema è incompatibile.*

Per $k = 0$ *si è già osservato che si ha la soluzione banale.*

Per $k = -2$ *il sistema diventa*

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + 2y = -2 \\ -8x - 4y = 0 \end{cases}$$

Il rango della matrice dei coefficienti è 2*, essendo* $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$ *(i coefficienti della terza equazione sono pari a quelli della prima moltiplicati per* -4*). Il sistema può pertanto scriversi omettendo la terza equazione come*

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + 2y = -2 \end{cases}$$

da cui, mediante il teorema di Cramer, determiniamo la soluzione

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{2} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{2} = -2.$$

Per $k = 2$ *il sistema diventa*

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x - 2y = 2 \\ -8x + 4y = 0 \end{cases}$$

Il rango della matrice dei coefficienti anche in questo caso è 2*, essendo* $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$ *(i coefficienti della terza equazione sono pari a quelli della prima moltiplicati per* 4*). Il sistema può dunque scriversi omettendo la terza equazione come*

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

dal quale determiniamo la soluzione

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{2} = -1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{2} = -2.$$

Esempio 146 (15.06.99) *Determinare per quali valori del parametro k il seguente sistema ammette soluzioni e calcolarle*

$$\begin{cases} 3kx + (k-1)y & = 2 \\ x \qquad + & kz = 3 \\ 2x + \qquad y - (k+1)z & = k \end{cases}$$

Il sistema è in tre equazioni e tre incognite.Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti. E'

$$\begin{vmatrix} 3k & k-1 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 2 & 1 & -(k+1) \end{vmatrix} = -2k - 1$$

Essendo $-2k-1 \neq 0$ per $k \neq -\frac{1}{2}$, si ha

$$\textit{per} \quad k \neq -\frac{1}{2} \qquad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \ \textit{soluzione}$$

che determiniamo applicando il teorema di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & k-1 & 0 \\ 3 & 0 & k \\ k & 1 & -(k+1) \end{vmatrix}}{-(2k+1)} = -\frac{k^3 + 2k^2 - 2k - 3}{2k+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3k & 2 & 0 \\ 1 & 3 & k \\ 2 & k & -(k+1) \end{vmatrix}}{-(2k+1)} = \frac{3k^3 + 9k^2 + 3k - 2}{2k+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3k & k-1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & k \end{vmatrix}}{-(2k+1)} = \frac{k^2 + 2k + 4}{2k+1}$$

Per $k = -\frac{1}{2}$ il sistema diventa

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}x + -\frac{3}{2}y & = 2 \\ x \qquad & -\frac{1}{2}z = 3 \\ 2x + \qquad y - \frac{1}{2}z & = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Il rango della matrice completa è 3, essendo non nullo almeno uno dei 4 minori del terzo ordine da essa estraibili. E' infatti, per esempio

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{13}{4} \neq 0$$

Pertanto, per $k = -\frac{1}{2}$, è $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A}/\overline{b})$ e per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è incompatibile.

Esempio 147 (18.02.99) *Determinare per quali valori del parametro k il seguente sistema ammette soluzioni e calcolarle*

$$\begin{cases} kx - y = 0 \\ x + y = k \\ 9x - ky = 0 \end{cases}$$

Il sistema è in tre equazioni e due incognite. E' subito visto che per $k = 0$ esso diventa un sistema omogeneo che dà luogo alla sola soluzione (banale) $x = 0$, $y = 0$. Per $k \neq 0$ il sistema non è omogeneo. Essendo sistema in tre equazioni e due incognite, calcoliamo anzitutto il rango della matrice completa. Si ha

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ 9 & -k & 0 \end{vmatrix} = k^3 - 9k = k(k^2 - 9)$$

Il rango della matrice completa è 3 per $k(k^2 - 9) \neq 0$, cioè per $k \neq 0$ e per $k \neq \pm 3$. Poiché il rango della matrice dei coefficienti è sicuramente minore di 3 per $k \neq 0$ e $k \neq \pm 3$ il sistema è incompatibile.

Per $k = 0$ si è già osservato che si ha la soluzione banale.

Per $k = -3$ il sistema diventa

$$\begin{cases} -3x - y = 0 \\ x + y = -3 \\ 9x + 3y = 0 \end{cases}$$

Il rango della matrice dei coefficienti è 2, essendo $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3+1 = -2 \neq 0$ (*i coefficienti della terza equazione sono pari a quelli della prima moltiplicati per* -3). *Il sistema può dunque scriversi eliminando la terza equazione*

$$\begin{cases} -3x - y = 0 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

da cui, mediante il teorema di Cramer, determiniamo la soluzione

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{3}{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{9}{2}.$$

Per $k = 3$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y = 3 \\ 9x - 3y = 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso il rango della matrice dei coefficienti è 2, essendo $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0$ (*i coefficienti della terza equazione sono pari a quelli della prima moltiplicati per* 3). *La terza equazione può dunque essere omessa ed il sistema può scriversi come*

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

dal quale determiniamo la soluzione

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{3}{4} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{9}{4}.$$

Esempio 148 (04.02.99) *Determinare per quali valori del parametro k il seguente sistema ammette soluzioni e calcolarle*

$$\begin{cases} x + ky - z = 3 \\ kx + 4y - 2z = 3k \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Il sistema è in tre equazioni e tre incognite.Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti. E'

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 - 3k + 10$$

Essendo $-k^2 - 3k + 10 \neq 0$ per $k \neq -5$ e $k \neq 2$ si ha

$$\text{per} \quad k \neq -5 \quad \text{e} \quad k \neq 2 \qquad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \text{ soluzione}$$

che determiniamo applicando il teorema di Cramer:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & k & -1 \\ 3k & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(k+5)(k-2)} = \frac{-3k^2 - 5k + 22}{(k+5)(k-2)} = -\frac{3k+11}{k+5} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ k & 3k & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(k+5)(k-2)} = \frac{2k-4}{(k+5)(k-2)} = \frac{2}{k+5} \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & k & 3 \\ k & 4 & 3k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(k+5)(k-2)} = \frac{2k^2 - 8}{(k+5)(k-2)} = 2\frac{k+2}{k+5} \end{aligned}$$

Per $k = -5$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x - 5y - z = 3 \\ -5x + 4y - 2z = -15 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Estraendo dalla matrice completa il minore

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -15 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 42 \neq 0$$

si conclude che $r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 3$. *Essendo, per* $k = -5$, *è* $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A}/\overline{b})$, *per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema è incompatibile.*

Per $k = 2$ *il sistema diventa*

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 6 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Osservando che i coefficienti della seconda equazione sono pari al prodotto di 2 *per i corrispondenti coefficienti della prima equazione, possiamo concludere − senza neanche procedere al calcolo dei minori del terzo ordine estraibili dalla matrice completa − che il rango di questa è minore di* 3. *In particolare, considerando nella matrice completa il minore relativo alla prima e terza riga ed alla prima e seconda colonna, si ha*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

e pertanto $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 2$. *Per* $k = 2$ *il sistema è dunque compatibile e si hanno* $\infty^{3-2} = \infty^1$ *soluzioni che si ottengono applicando il teorema di Cramer al sistema scritto come*

$$\begin{cases} x + 2y = 3 + z \\ x + y = 1 - z \end{cases} .$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 3+z & 2 \\ 1-z & 1 \end{vmatrix}}{-1} = -3z - 1 \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3+z \\ 1 & 1-z \end{vmatrix}}{-1} = 2(z+1) \\ z &= \overline{z} \end{aligned}$$

Esempio 149 (20.11.98) *Determinare per quali valori del parametro* k *il seguente sistema ammette soluzioni e calcolarle*

$$\begin{cases} -2kx + 2y + 2z = 1 \\ 2kx + z = 2 \\ -x + y + kz = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Il sistema è in tre equazioni e tre incognite. Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti. E'

$$\begin{vmatrix} -2k & 2 & 2 \\ 2k & 0 & 1 \\ -1 & 1 & k \end{vmatrix} = -2(2k^2 - 3k + 1)$$

Essendo $-2(2k^2-3k+1)\neq 0$ *per* $k\neq\frac{1}{2}$ *e* $k\neq 1$ *si ha*

$$\textit{per}\quad k\neq\frac{1}{2}\quad \textit{e}\quad k\neq 1\qquad r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}/\overline{b})=3\qquad\Longrightarrow\qquad 1\ \textit{soluzione}$$

che determiniamo applicando il teorema di Cramer:

$$x\quad=\quad\frac{\begin{vmatrix}1&2&2\\2&0&1\\-\frac{1}{2}&1&k\end{vmatrix}}{-2(2k-1)(k-1)}=\frac{-4k+2}{-2(2k-1)(k-1)}=\frac{1}{k-1}$$

$$y\quad=\quad\frac{\begin{vmatrix}-2k&1&2\\2k&2&1\\-1&-\frac{1}{2}&k\end{vmatrix}}{-2(2k-1)(k-1)}=\frac{-6k^2-3k+3}{-2(2k-1)(k-1)}=\frac{3(k+1)}{2(k-1)}$$

$$z\quad=\quad\frac{\begin{vmatrix}-2k&2&1\\2k&0&2\\-1&1&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}}{-2(2k-1)(k-1)}=\frac{8k-4}{-2(2k-1)(k-1)}=\frac{-2}{k-1}$$

Per $k=\frac{1}{2}$ *il sistema diventa*

$$\begin{cases}-x+2y+\ 2z=1\\ \ \ x\qquad\ +\ \ z=2\\ -x+\ y\ +\frac{1}{2}z=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

I 4 *minori del terzo ordine estraibili dalla matrice completa*

$$\begin{Vmatrix}-1&2&2&1\\1&0&1&2\\-1&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{Vmatrix}$$

sono tutti nulli (in particolare, il minore estraibile dalla matrice dei coefficienti è nullo perché $k=\frac{1}{2}$*) in quanto la terza riga è ottenuta per combinazione lineare delle prime due essendo pari a* $\frac{1}{2}$*(*I^a *riga*$-$ II^a *riga). In particolare il rango è* 2 *essendo non nullo il minore formato dalle prime due righe e due colonne:*

$$\begin{vmatrix}-1&2\\1&0\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Quindi, per $k=\frac{1}{2}$, $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A}/\overline{b})=2$ *ed il sistema è compatibile ed ammette* $\infty^{3-2}=\infty^1$ *soluzioni. Poiché si è scelto il minore calcolato con le prime due righe e due colonne, il sistema può essere riscritto come*

$$\begin{cases}-x+2y=1-2z\\ \ \ x\qquad\ =2-z\\ \ \ z=\overline{z}\end{cases}$$

da cui segue immediatamente che le soluzioni sono

$$x=2-z,\quad y=\frac{3(1-z)}{2},\quad z=\overline{z}$$

Per $k=1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} -2x+2y+2z=1 \\ 2x \qquad\quad + \ z=2 \\ - \ x+ \ y \ + \ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Il rango della matrice completa è 3 essendo

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Poiché $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A}/\overline{b})$, per $k=1$ il sistema è incompatibile.

Esempio 150 (07.10.98) *Determinare per quali valori del parametro k il seguente sistema ammette soluzioni e calcolarle*

$$\begin{cases} x-(k+1)y=1 \\ 3kx+ \qquad 6y=-3 \end{cases}$$

Il sistema è in due equazioni e due incognite. Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti. E'

$$\begin{vmatrix} 1 & -(k+1) \\ 3k & 6 \end{vmatrix} = 3(k^2+k+2)$$

Poiché $k^2+k+2 \neq 0$ per ogni k è comunque $r(\mathbf{A})=2$. Il rango della matrice completa non può che essere 2 e pertanto il sistema è compatibile ed ha l'unica soluzione

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -(k+1) \\ -3 & 6 \end{vmatrix}}{3(k^2+k+2)} = -\frac{k-1}{k^2+k+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3k & -3 \end{vmatrix}}{3(k^2+k+2)} = -\frac{k+1}{k^2+k+2}$$

Esempio 151 (21.09.98) *Determinare per quali valori del parametro k il seguente sistema ammette soluzioni e calcolarle*

$$\begin{cases} 3x+ \ y \qquad =0 \\ x+ \qquad kz=3 \\ -x+ky-2z=1 \end{cases}$$

Il sistema è in tre equazioni e tre incognite.Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti. E'

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ -1 & k & -2 \end{vmatrix} = -3k^2-k+2$$

Essendo $-3k^2 - k + 2 \neq 0$ *per* $k \neq -1$ *e* $k \neq \frac{2}{3}$ *si ha*

$$\text{per} \quad k \neq -1 \quad e \quad k \neq \frac{2}{3} \qquad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \text{ soluzione}$$

che determiniamo applicando il teorema di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & k \\ 1 & k & -2 \end{vmatrix}}{-3k^2 - k + 2} = \frac{k+6}{-3k^2 - k + 2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & k \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-3k^2 - k + 2} = \frac{3k+18}{3k^2 + k - 2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & k & 1 \end{vmatrix}}{-3k^2 - k + 2} = \frac{9k+4}{3k^2 + k - 2}$$

Per $k = -1$ *il sistema diventa*

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - z = 3 \\ -x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

Almeno un minore del terzo ordine estraibile dalla matrice completa è diverso da zero, essendo per esempio (prima, seconda e quarta colonna della matrice completa)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Pertanto, essendo $r(\mathbf{A}) = 2 < r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 3$, *per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è incompatibile per* $k = -1$.

Per $k = \frac{2}{3}$ *il sistema diventa*

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + \frac{2}{3}z = 3 \\ -x + \frac{2}{3}y - 2z = 1 \end{cases}$$

Anche in questo caso, almeno un minore del terzo ordine estraibile dalla matrice completa è diverso da zero. Infatti, considerando lo stesso minore del caso precedente si ha

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Poiché $r(\mathbf{A}) = 2 < r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 3$, *anche per* $k = \frac{2}{3}$ *il sistema è incompatibile.*

Esempio 152 (15.07.98) *Determinare per quali valori del parametro k il seguente sistema ammette soluzioni e calcolarle*

$$\begin{cases} x + \quad y + 5z = 1 \\ kx + \quad 2ky + 3z = 0 \\ x + (k+1)y + 2z = 1 \end{cases}$$

Il sistema è in tre equazioni e tre incognite.Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti. E'

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ k & 2k & 3 \\ 1 & k+1 & 2 \end{vmatrix} = 5k^2 - 6k$$

Poiché $5k^2 - 6k \neq 0$ *per* $k \neq 0$ *e* $k \neq \frac{6}{5}$ *si ha*

$$per \quad k \neq 0 \quad e \quad k \neq \frac{6}{5} \qquad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \text{ soluzione}$$

che determiniamo applicando il teorema di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2k & 3 \\ 1 & k+1 & 2 \end{vmatrix}}{5k^2 - 6k} = -\frac{9}{5k-6}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ k & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{5k^2 - 6k} = \frac{3}{5k-6}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 2k & 0 \\ 1 & k+1 & 1 \end{vmatrix}}{5k^2 - 6k} = \frac{k}{5k-6}$$

Per $k = 0$ *il sistema diventa*

$$\begin{cases} x + y + 5z = 1 \\ 3z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

Osserviamo che il rango della matrice completa

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

è minore di 3 essendo la seconda riga la differenza della prima e della terza. Inoltre è $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 2$*; infatti è*

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Per $k=0$ il sistema è dunque compatibile ed ammette le $\infty^{3-2}=\infty^1$ soluzioni

$$x=\overline{x}, \quad y=1-x, \quad z=0.$$

Per $k=\frac{6}{5}$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x+ \quad y+5z=1 \\ \frac{6}{5}x+\frac{12}{5}y+3z=0 \\ x+\frac{11}{5}y+2z=1 \end{cases}$$

Consideriamo il minore del terzo ordine (estratto dalla matrice completa)

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ \frac{6}{5} & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{18}{5} \neq 0$$

Essendo tale minore diverso da zero è $r(\mathbf{A}/\overline{b})=3$. Poiché per $k=\frac{6}{5}$ $r(\mathbf{A})=2$, in questo caso il sistema è incompatibile.

Esempio 153 (01.07.98) *Determinare per quali valori del parametro k il seguente sistema ammette soluzioni non banali e calcolarle*

$$\begin{cases} 2x+ky+3z=0 \\ 2kx+ \quad y+3z=0 \\ x+ky+2z=0 \end{cases}$$

Il sistema è in tre equazioni e tre incognite. Essendo un sistema omogeneo ammette comunque soluzioni. Per calcolare se ve ne sono di non banali calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti. E'

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 3 \\ 2k & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{vmatrix} = 2k^2-3k+1$$

Essendo $2k^2-3k+1=0$ per $k=\frac{1}{2}$ e $k=1$, per il teorema 140 si ha

$$\text{per } \; k=\frac{1}{2} \;\; e \;\; k=1 \quad r(\mathbf{A})<3 \quad \Longrightarrow \textit{il sistema ha soluzioni non banali.}$$

In particolare, osservando che il minore $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-3=1$ formato dai coefficienti della prima e terza riga e prima e terza colonna non dipende dal parametro k, in entrambi i casi (cioè sia per $k=\frac{1}{2}$ sia per $k=1$) si hanno $\infty^{3-2}=\infty^1$ soluzioni.

Per $k=\frac{1}{2}$ Il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}y+3z=0 \\ x+ \quad y+3z=0 \\ x+\frac{1}{2}y+2z=0 \end{cases}$$

da cui seguono le soluzioni

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}y & 3 \\ -\frac{1}{2}y & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{1}{2}y$$

$$y = \overline{y}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{2}y \\ 1 & -\frac{1}{2}y \end{vmatrix}}{1} = -\frac{1}{2}y$$

Per $k = 1$ *Il sistema diventa*

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

da cui seguono le soluzioni

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -y & 3 \\ -y & 2 \end{vmatrix}}{1} = y$$

$$y = \overline{y}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -y \\ 1 & -y \end{vmatrix}}{1} = -y$$

Per $k \neq \frac{1}{2}$ *e* $k \neq 1$ *il sistema presenta la soluzione banale.*

Esempio 154 (15.06.98) *Determinare per quali valori del parametro k il seguente sistema ammette soluzioni e calcolarle*

$$\begin{cases} 2x + y + kz = 2 \\ kx + ky + kz = 0 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$$

Il sistema è in tre equazioni e tre incognite.Calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti. E'

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ k & k & k \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3k^2 - 4k$$

Poiché $3k^2 - 4k \neq 0$ *per* $k \neq 0$ *e* $k \neq \frac{4}{3}$ *si ha*

$$per \quad k \neq 0 \quad e \quad k \neq \frac{4}{3} \qquad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \ soluzione$$

che determiniamo applicando il teorema di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3k^2 - 4k} = -\frac{2}{3k-4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & k \\ k & 0 & k \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{3k^2 - 4k} = -\frac{4}{3k-4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ k & k & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3k^2 - 4k} = \frac{6}{3k-4}$$

Per $k = 0$ osserviamo che il rango della matrice completa

$$\left\| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

è minore di 3 essendo gli elementi della seconda riga tutti nulli. In particolare il minore formato dalla prima e terza riga e dalla prima e seconda colonna è

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Per $k = 0$ il sistema è dunque compatibile ed ammette le $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni che si determinano risolvendo

$$\begin{cases} 2x + \quad y = 2 \\ -2x + \quad y = 0 \\ \quad z = \overline{z} \end{cases}$$

cioè

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = 1, \quad z = \overline{z}.$$

Per $k = \frac{4}{3}$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + \quad y + \frac{4}{3}z = 2 \\ \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}y + \frac{4}{3}z = 0 \\ -2x + \quad y \qquad = 0 \end{cases}$$

Consideriamo il minore del terzo ordine (estratto dalla matrice completa)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

Essendo tale minore diverso da zero è $r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 3$. Poiché per $k = \frac{4}{3}$ il rango di $\mathbf{A}$ è 2, in questo caso il sistema è incompatibile.

Esempio 155 (18.02.98) *Determinare per quali valori del parametro k il seguente sistema ammette soluzioni non banali e calcolarle*

$$\begin{cases} 4kx + 4ky = 0 \\ 2kx + \ \ 2y = 0 \end{cases}$$

Il sistema è in due equazioni e due incognite. Essendo un sistema omogeneo ammette comunque soluzioni. Per calcolare se ve ne sono di non banali calcoliamo il rango della matrice dei coefficienti. E'

$$\begin{vmatrix} 4k & 4k \\ 2k & 2 \end{vmatrix} = 8k - 8k^2$$

Essendo $8k - 8k^2 = 0$ per $k = 0$ e $k = 1$, per il teorema 140 si ha

$$\text{per} \ \ k = 0 \ \ \text{e} \ \ k = 1 \quad r(\mathbf{A}) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \infty^{3-2} = \infty^1 \ \text{soluzioni}$$

che determiniamo distinguendo i due casi:

$k = 0$) *Il sistema diventa*

$$\begin{cases} x = \overline{x} \\ y = 0 \end{cases}$$

che costituiscono le soluzioni non banali del sistema.

$k = 1$) *Il sistema diventa*

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

da cui seguono immediatamente le soluzioni

$$x = -y, \quad y = \overline{y}$$

Evidentemente, per $k \neq 0$ e $k \neq 1$ il sistema presenta la soluzione banale.

Esempio 156 *Determinare per quali valori del parametro k il seguente sistema ammette soluzioni e calcolarle*

$$\begin{cases} \quad 2kx + y - z = k \\ (k+1)x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

Il sistema è in due equazioni e tre incognite. Dalla matrice dei coefficienti, scegliendo il minore formato dalla seconda e terza colonna si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

da cui segue che $r(\mathbf{A}) = 2$. Il sistema ha pertanto $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni che determiniamo applicando il teorema di Cramer al sistema

$$\begin{cases} \ \ y - \ \ z = k - 2kx \\ -y + 2z = 1 - (k+1)x \end{cases}$$

Si ha

$$x = \overline{x}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} k-2kx & -1 \\ 1-(k+1)x & 2 \end{vmatrix}}{1} = -x(5k+1)+1+2k$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & k-2kx \\ -1 & 1-(k+1)x \end{vmatrix}}{1} = -x(3k+1)+1+k$$

Esempio 157 *Determinare per quali valori del parametro k il seguente sistema ammette soluzioni e calcolarle*

$$\begin{cases} kx + \quad y = 1 \\ \ \ x + ky = k \\ -x + \quad y = 2 \end{cases}$$

Il sistema è in tre equazioni e due incognite, per cui iniziamo a calcolare il rango della matrice completa. E'

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & k \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = k^2 - 1$$

Essendo $k^2 - 1 \neq 0$ per $k \neq \pm 1$ segue che

per $k \neq \pm 1 \quad r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 3 \quad \Longrightarrow$ *il sistema è incompatibile.*

Per $k = -1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ \ \ x - y = -1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

ed è subito visto che è incompatibile (si noti la contraddittorietà tra la prima e la terza equazione). Procedendo in maniera pedissequa si può osservare (verificare per esercizio) che il rango della matrice dei coefficienti è 1 mentre quello della matrice completa è 2, ciò che porta comunque alla conclusione di incompatibilità del sistema.

Per $k = 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

che, essendo uguali la prima e seconda equazione, può scriversi come

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases} .$$

Essendo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$*, il rango della matrice dei coefficienti è* 2*. Si ha dunque* $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}/\overline{b}) = 2$*; il sistema ha un'unica soluzione determinabile con il teorema di Cramer:*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3}{2}.$$

N.B. Per semplificare la notazione, nel presente paragrafo si ometterà di indicare i vettori con lettere soprassegnate.

Definizione 158 Sia A una matrice quadrata di ordine n, un vettore $v \neq \overline{0}$ è detto **autovettore di A associato all'autovalore** $\lambda \in \Re$, se vale

$$Av = \lambda v \tag{36}$$

Osservazione 159 a) se v è un autovettore associato all'autovalore λ allora un siffatto λ è unico, perché se esistessero $\lambda_1, \lambda_2 \in \Re$ tali che

$$\lambda_1 v = Av = \lambda_2 v \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 v - \lambda_2 v = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)v = \overline{0}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{, poiché } v \neq \overline{0} \text{ .}$$

b) a λ è, invece, associato più di un autovetture. In effetti si tratta di un'infinità di autovettori, perché se v è tale che $Av = \lambda v$ allora, preso comunque $c \in \Re$ con $c \neq 0$, risulta innanzi tutto $cv \neq \overline{0}$ e soprattutto :

$$A(cv) = c(Av) = c(\lambda v) = \lambda(cv)$$

da cui il vettore cv è associato al medesimo λ autovalore di v .

c) v autovettore associato all'autovalore λ se e solo se v è una soluzione propria del sistema omogeneo $(A - \lambda I)v = \overline{0}$.

Esempio 160 Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ diagonale. Allora i vettori $\overline{e}^1 = (1,0)$ ed $\overline{e}^2 = (0,1)$ sono autovettori di A associati, rispettivamente, agli autovalori a_1 e a_2. Infatti, risulta

$A\overline{e}^1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1\overline{e}^1$. Altrettanto vale per $\overline{e}^2$.

Definizione 161 Dati i vettori $v_1, \cdots, v_p$, si chiama $span\{v_1, \cdots, v_p\}$, l'insieme delle combinazioni lineari costituite da tali vettori. Ciò è una maniera equivalente di dire che i vettori generano il relativo *span*.

Osservazione 162 Se i vettori $v_1, \cdots, v_p$ fossero l. i., lo $span\{v_1, \cdots, v_p\}$ sarebbe semplicemente il sottospazio da essi generato.

In particolare, nel caso di un autovalore λ si pone

Definizione 163 $V_\lambda := span\{v : v \quad è \quad autovettore \quad di \quad \lambda\}$

(ovvero V_λ è il sottospazio generato da tutti gli autovettori associati all'autovalore λ). V_λ è detto **autospazio associato a** λ.

Tale definizione è ben posta, nel senso che effettivamente V_λ è un sottospazio ma prima di verificare ciò, premettiamo che – in maniera del tutto analoga a quanto visto per lo spazio $\Re^n$ (si veda la definizione 61 ed i punti successivi) - si può introdurre la seguente

Definizione 164 Dato un sottospazio vettoriale V dello spazio $\Re^n$, si dice che **i vettori,** $v_1, v_2, \dots, v_p \in V$ **, l. i. costituiscono una base per** V, se ogni vettore di V può essere espresso come loro combinazione lineare (ovvero "V è generato da tali vettori"). Per comodità di notazione, usiamo l'espressione insiemistica $\{v_1, \dots v_p\}$ per indicare una base.

Anche in questo caso

Osservazione 165 Si possono costruire differenti basi per il sottospazio V ma ciò che resta immutato è il numero p di elementi di una qualunque base di V. Tale intero p viene detto **rango o dimensione del sottospazio** V. Inoltre, ovviamente vale $p \le n$ (altrimenti i vettori non potrebbero essere l. i. per il teorema fondamentale degli spazi lineari) ma notiamo che nel caso limite $p = n$, si potrebbe dimostrare che $V = \Re^n$. Inoltre, fissata una base di V, ogni vettore del sottospazio si può esprimere in modo **univoco** rispetto ad essa.

Tornando alla definizione di autospazio, come anticipato, dimostriamo che

Proposizione 166 V_λ è un sottospazio vettoriale ed ogni suo elemento non nullo è un autovettore associato all'autovalore λ.

Dim Siano $w_1, w_2 \in V_\lambda$ e quindi tali che $Aw_1 = \lambda w_1$ e $Aw_2 = \lambda w_2$. Si ha che

$$A(w_1 + w_2) = Aw_1 + Aw_2 = \lambda w_1 + \lambda w_2 = \lambda(w_1 + w_2) \quad \Rightarrow \quad w_1 + w_2 \in V_\lambda$$

ed inoltre

$$\forall \alpha \in \Re,\ A(\alpha w_1) = \alpha(Aw_1) = \alpha(\lambda w_1) = \lambda(\alpha w_1) \quad \Rightarrow \quad \alpha w_1 \in V_\lambda \ \square$$

Definizione 167 Data A_n , matrice di ordine n , si chiama **polinomio caratteristico di A** , quello così definito (I è sempre la matrice identica – di ordine n, nel nostro caso):

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}-\lambda \end{pmatrix}$$

Osservazione 168 a) Svolgendo i calcoli del determinante, risulta

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + \dots \quad ,$$

ovvero il polinomio caratteristico ha grado n.

b) $\qquad P_A(0) = (-1)^n \det(A)$

Teorema 169 Data A_n , allora

λ autovalore per $A \quad \Leftrightarrow \quad P_A(\lambda) = 0 \qquad$ (ovvero λ è una radice del polinomio caratteristico).

Dim Sia $\hat{\lambda}$ una radice del polinomio

$$\Leftrightarrow \quad P_A(\hat{\lambda}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(A - \hat{\lambda} I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r(A - \hat{\lambda} I) < n$$

$\Leftrightarrow \quad (A - \hat{\lambda} I)w = \overline{0}$, come sistema omogeneo, ammette soluzioni proprie $\Leftrightarrow \quad \exists v \neq \overline{0}$ soluzione propria di $(A - \hat{\lambda} I)w = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad v$ autovettore per l'autovalore $\hat{\lambda}$. $\square$

Ricordiamo che quando si dice che la radice x_0 ha molteplicità k per il polinomio $P_n(x)$, di grado n, si intende che si può scrivere $P_n(x) = (x - x_0)^k P_{n-k}(x)$, con $P_{n-k}(x)$ un opportuno polinomio di grado n-k .

Definizione 170 La molteplicità di un autovalore λ , inteso come soluzione del polinomio caratteristico, è detta **molteplicità dell'autovalore**.

Osservazione 171 a) Se ci sono n autovalori distinti per A, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ allora il polinomio caratteristico è uguale a:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

b) Per trovare gli autovalori di una matrice A, si risolve l'equazione in λ

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{37}$$

mentre, per trovare gli autovettori riferiti agli autovalori radici della (37), si risolve il sistema

$$(A - \hat{\lambda} I) w = \bar{0} \tag{38}$$

Al variare dei $\hat{\lambda}$ tra le radici del polinomio caratteristico.

Definizione 172 Dato un autovalore λ e considerato l'autospazio V_λ ad esso associato , la dimensione di V_λ è per definizione, quella dello spazio generato dalle radici del sistema lineare omogeneo associato a λ.

Osservazione 173 Una matrice quadrata A_n è detta **triangolare superiore** [risp. **inferiore**] se tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale [risp. secondaria] sono nulli (ovvero se $a_{i,j} = 0$ con $i > j$ [risp. $i < j$]).

Esempio 174 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è triangolare superiore.

Osservazione 175 a) Una matrice diagonale può essere vista come una matrice contemporaneamente triangolare superiore ed inferiore.

b) Per quanto attiene agli autovalori, se la matrice A è diagonale o triangolare (superiore od inferiore) allora gli autovalori di A sono dati dagli elementi presenti nella diagonale principale della matrice stessa.

Esempio 176 Sia $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}=0$ (che è l'equazione (37)) e che equivale a scrivere

$$(3-\lambda)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3-\lambda=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=3 \text{ (doppia).}$$

(come visto nell'osservazione 173). Pertanto, c'è un solo autovalore che viene "contato due volte". Cerchiamo gli autovettori ad esso associati ovvero il relativo autospazio. Innanzi tutto l'equazione (38) diventa, visto il valore dell'autovalore, uguale a:

$$A_3 \equiv A-3I=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente, il rango di A_3 non può essere *2* (avendo imposto la condizione che il suo determinante sia nullo). In effetti vale $r(A)=1$ perché ovviamente c'è un (unico) elemento non nullo nella matrice A_3 $(A_3)_{1,2}=1\neq 0$.

Vediamo ora di ricavare gli autovettori di A, di fatto quelli associati all'unico autovalore della matrice (pur se contato due volte). Utilizzando come matrice dei coefficienti quella A_3 su riportata, occorre allora risolvere il sistema che ne deriva:

$$\{ \quad y=0$$

che ammette $\infty^{2-1}=\infty^1$ soluzioni proprie, grazie al teorema di Rouché-Capelli. Di conseguenza, la dimensione dell'autospazio V_3 associato a $\lambda=3$ è proprio *1*. Chiaramente le soluzioni di tali sistema sono del tipo $\{(t,0)\}_{t\in\Re}$. Si può scrivere che $V_3=\{t(1,0)\}_{t\in\Re}$ e ciò permette di identificare gli autovettori associati all'autovalore indicato. Per inciso, essi sono tutti multipli dell'autovettore $v_1:=(1,0)$.

Osservazione 177 Se è dato un sistema lineare la cui matrice dei coefficienti è triangolare superiore o addirittura diagonale, la relativa soluzione è meno costosa in termini e di calcoli e di tempo. Pertanto, "trasformare" una data matrice dei coefficienti appunto in forma triangolare o diagonale, se possibile, è auspicabile. Vedremo tra breve che a tale scopo, sono utili gli autovalori e gli autovettori.

Definizione 178 a) Data A_n , si dice che **essa è triangolarizzabile** [rispettivamente **diagonalizzabile**] se $\exists B_n$, invertibile, tale che la matrice $B^{-1}AB$ sia triangolare superiore o inferiore [risp. diagonale].

b) Date due matrici A_n e C_n, esse sono dette **simili** se $\exists B_n$, invertibile, tale che $C = B^{-1}AB$.

Risulta vero che (nelle notazioni della definizione precedente):

Proposizione 179 Se due matrici A e $C = B^{-1}AB$ sono simili allora esse hanno lo stesso

a) determinante o, altrimenti detto, $\det(C) = \det(B^{-1}AB) = \det(A)$;

b) polinomio caratteristico, ovvero $P_C(\lambda) = P_{B^{-1}AB}(\lambda) = P_A(\lambda)$;

c) rango, ovvero $r(C) = r(B^{-1}AB) = r(A)$.

Utilizzando il

Teorema 180 Siano $v_1, v_2, \ldots, v_p$ autovettori di A_n associati, rispettivamente, agli autovalori (reali[1]) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Vale che

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j \quad \Leftrightarrow \quad v_1, v_2, \ldots, v_p \text{ sono l. i. },$$

ovvero ad autovalori distinti corrispondono autovettori l. i. e viceversa,

[1] Nelle presenti dispense si tratteranno solo le matrici e gli autovalori reali e non anche quelli complessi. Pertanto, l'uso della parentesi con scritto "reale/i" è giusto per dare il messaggio che, nel caso generale di matrici con elementi dati da numeri complessi e/o autovalori complessi, l'appartenenza di questi ultimi al campo dei numero reali è una specifica importante lì dove è ottenuta come proprietà.

si può dimostrare l'importante

Teorema 181 Ogni matrice A_n è triangolarizzabile.

Osservazione 182 Se A_n è diagonalizzabile, si consideri la sua cosiddetta **trasformata diagonale**, D_n, ovvero la matrice diagonale ricavata dalla posizione $D = B^{-1}AB$ con B matrice invertibile. Indicata esplicitamente:

$$D_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

allora dovrebbe valere

$$B^{-1}AB = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad AB = BD \quad .$$

Ciò è vero se e solo se, indicate le colonne di B con i vettori v_i - ovvero $B_n := (v_1 \ , \quad v_2, \quad \cdots, \quad v_n)$ - risulta

$$\begin{cases} Av_1 = \lambda_1 \ v_1 \\ \quad \cdots \\ Av_n = \lambda_n v_n \end{cases} . \qquad (39)$$

Quanto scritto in realtà equivale a dire che le colonne di B sono autovettori per la matrice A associati, rispettivamente, agli elementi posti nella diagonale di D che risultano a loro volta gli autovalori di A.

In particolare, è vero che

Teorema 183 A_n è diagonalizzabile se e solo se A_n ammette n autovettori l. i. .

Dim $(\Rightarrow)$ A è diagonalizzabile quindi $\exists B$, invertibile, tale che la matrice $D := B^{-1}AB$ è diagonale. Del resto se B, di ordine *n*, è invertibile, si ha che $\det(B) \neq 0 \quad \Rightarrow$ le sue colonne, intese come vettori, sono l. i. . Per l'osservazione precedente, esse sono autovettori per A in numero di *n* e sono l. i. il che implica la prima parte del teorema.

$(\Leftarrow)$ A ammette *n* autovettori l.i., siano essi $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Definiamo la matrice B , di ordine *n*, come quella che ammette come colonne tali vettori ovvero $B_n = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & \cdots, & v_n \end{pmatrix}$. Visto che le colonne sono per ipotesi l.i., ciò implica che $\det(B) \neq 0 \quad \Rightarrow B$ è invertibile (avendo rango massimo *n*). Inoltre, agli autovettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono associati, rispettivamente,.gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tali che $Av_i = \lambda_i v_i$ per $i = 1, \ldots, n$.

Posta allora

$$D_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

tale matrice è diagonale e risulta ovviamente (come nella (39))

$$AB = BD \quad \Rightarrow \quad D = B^{-1}AB$$

con B invertibile. Tutto ciò è proprio la definizione di diagonalizzabilità della matrice A. □

Dai teoremi 180 e 183, si ricava che

Teorema 184 Se A_n ammette n autovalori (reali) distinti allora A_n è diagonalizzabile.

Dim $\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n autovalori distinti allora (per il teorema 178) $\exists v_1, v_2, \ldots, v_n$ che sono n autovettori l. i.; da ciò ancora (per il teorema 181) la matrice A_n è diagonalizzabile. □

Premettiamo la

Definizione 185 Una matrice B_n è detta **unitaria** se è invertibile e se la sua inversa coincide con la sua trasposta, ovvero $B^{-1} = B^T$.

Ricordando la definizione e la notazione della diagonalizzabilità, risulta vero che

Teorema 186 Se A_n matrice (reale) è simmetrica allora A_n è diagonalizzabile, con B_n unitaria. Viceversa, se A_n è diagonalizzabile con B_n unitaria, allora A_n è una matrice (reale) simmetrica.

Definizione 187 Data A_n diagonalizzabile, con matrice diagonale associata

$D_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, si dice che **esiste una base che diagonalizza A**,

costituita dai vettori $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ associati agli autovalori $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ (eventualmente non distinti) e, di fatto, tale base è costituita dall'unione di quelle degli autospazi V_{λ_i} (presi corrispondentemente). In simboli, si scriverà

$$B_A := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$ [2]

[2] Anche gli autovettori sono rinumerati opportunamente: per esempio, se A ammette due autovalori distinti λ_1, λ_2 e se le basi per i relativi autospazi V_{λ_1} e V_{λ_2} sono costituite dagli autovettori $\{v_1, v_2, v_3\}$ e, rispettivamente, da $\{w_1, w_2\}$ allora la base che diagonalizza la matrice A sarà $B_A := \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$ con $v_4 := w_1$ e $v_5 := w_2$.

Esempio 188 Sia data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, e si cerchino i relativi autovalori ed autovettori, identificando i corrispondenti autospazi, oltre a verificare se e come essa possa essere diagonalizzata.

In effetti, grazie al teorema 184, poiché *A* è simmetrica, sappiamo a priori che essa è diagonalizzabile. Ora, il suo polinomio caratteristico, posto uguale a *0*, è dato

$$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -\lambda & 3 \\ 0 & 3 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 25\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 5) = 0,$$

da cui si ricava che esso ammette come radici i seguenti autovalori:

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 5, \ \lambda_3 = -5.$$

Esplicitiamo gli autospazi e gli autovettori corrispondenti.

1. $\lambda_1 = 0$

Tale autovalore ha matrice "associata"

$$A - 0 \cdot I_3 \equiv A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

che rango *2* , visto che da essa si può estrarre quella di dimensione 2

$$A_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

con rango *2*, poiché il suo determinante è diverso da *0* . Pertanto, l'autospazio V_0 associato a tale autovalore avrà dimensione *1*, in quanto il sistema lineare relativo[3] - che ha $A_0^{(2)}$ come matrice dei coefficienti - ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, per il teorema di Rouché-Capelli. Tali soluzioni possono essere ricavate risolvendo, appunto

[3] Si tratta del sistema che permette di ricavare gli autovettori corrispondenti all'autovalore considerato.

$$\begin{cases} 4y = 0 \\ 4x + 3z = 0 \end{cases}.$$

Se si attribuisce a *z* il valore parametrico *t*, il sistema si può riscrivere come

$$\begin{cases} z = t \\ y = 0 \\ 4x = -3t \end{cases},$$

le cui soluzioni sono $\left(-\frac{3}{4}t, 0, t\right)_{t \in \Re}$. In conclusione, $V_0 = \{t \cdot v_1\}_{t \in \Re}$, ovvero V_0 ammette come elementi i "multipli" dell'autovettore $v_1 = \left(-\frac{3}{4}, 0, 1\right)$.

Analogamente:

2. $\lambda_2 = 5$

ha matrice "associata"

$$A - 5 \cdot I_3 \equiv A_5 = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Nuovamente, il rango è *2*, visto che da essa si può estrarre la sotto-matrice di dimensione 2 e rango *2*

$$A_5^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

(sempre perché il suo determinante è diverso da *0*). Anche l'autospazio V_5 avrà dimensione *1*, in quanto il sistema che ha $A_5^{(2)}$ come matrice dei coefficienti ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, grazie al teorema di Rouché-Capelli. Risolvendo, quindi

$$\begin{cases} 4x - 5y + 3z = 0 \\ 3y - 5z = 0 \end{cases}$$

ed attribuendo a *z* il valore parametrico *t*, tale sistema diviene

$$\begin{cases} z = t \\ 4x - 5y = -3t \\ 3y = 5t \end{cases},$$

con soluzioni del tipo $\left(\frac{4}{5}t, \frac{5}{3}t, t\right)_{t\in\Re}$. In sintesi, $V_5 = \{t \cdot v_2\}_{t\in\Re}$, scegliendo l'autovettore $v_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{5}{3}, 1\right)$.

Infine,

3. $\lambda_2 = -5$

ha matrice "associata"

$$A + 5 \cdot I_3 \equiv A_5 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ancora una volta, il rango è *2*, visto che da essa si può estrarre

$$A_{-5}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

avente rango *2* (di nuovo perché il suo determinante è non nullo). L'autospazio V_{-5} ha allora dimensione *1*, visto che il sistema che ha $A_{-5}^{(2)}$ come matrice dei coefficienti ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni, per il teorema di Rouché-Capelli. Pertanto, dal sistema

$$\begin{cases} 5x + 4y = 0 \\ 4x + 5y + 3z = 0 \end{cases}.$$

riscritto in modo da attribuire a x il valore parametrico t, si può porre

$$\begin{cases} x = t \\ 4y = -5t \\ 5y + 3z = -4t \end{cases}$$

e ricavare le soluzioni $\left(t, -\frac{5}{4}t, \frac{3}{4}t\right)_{t\in\Re}$ che esplicitano $V_{-5} = \{t \cdot v_3\}_{t\in\Re}$, prendendo l'autovettore $v_3 = \left(1, -\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

Per concludere, la matrice trasformata in forma diagonale di A è

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

mentre una base diagonalizzante per A è data dall'insieme $B_A = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Definizione 189 Sia A_n, matrice di ordine n, simmetrica. A è detta

a) **definita positiva** [risp. **definita negativa**] se $\forall \overline{x} \in \Re^n$ con $\overline{x} \neq \overline{0}$, risulta

$$\overline{x}^T \cdot A \cdot \overline{x} > 0 \qquad [\text{ risp. } \overline{x}^T \cdot A \cdot \overline{x} < 0 \text{ }];$$

b) **semidefinita positiva** [risp. **semidefinita negativa**] se $\forall \overline{x} \in \Re^n$ risulta

$$\overline{x}^T \cdot A \cdot \overline{x} \geq 0 \qquad [\text{ risp. } \overline{x}^T \cdot A \cdot \overline{x} \leq 0 \text{ }];$$

c) **indefinita** in ogni altro caso.

Definizione 190 Data A_n, si chiamano **minori principali di ordine** $\boldsymbol{k}$ di A_n, i determinanti delle matrici quadrate di ordine k estratti da A_n e contenenti gli elementi sulla diagonale principale di A_n. Tali minori verranno indicati con D_k con $k = 1, \ldots, n$.

Teorema 191 Sia A_n simmetrica e si considerino i minori principali D_k con $k = 1, \ldots, n$. Si ha che

a) A_n è definita positiva [risp. definita negativa] se e solo se

$$D_k > 0 , \quad \forall k = 1, \ldots, n \qquad [\text{risp. } (-1)^k D_k > 0 , \quad \forall k = 1, \ldots, n] .$$

b) A_n è semidefinita positiva [risp. semidefinita negativa] se e solo se

$$D_k \geq 0 , \ \forall k = 1, \ldots, n \qquad [\text{risp. } (-1)^k D_k \geq 0 , \ \forall k = 1, \ldots, n]$$

c) Se A_n è semidefinita positiva [risp. semidefinita negativa] allora

A_n è definita positiva [risp. definita negativa] se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Osservazione 192 Sia A_n simmetrica e definita positiva, chiaramente per il teorema precedente, il $\det(A) > 0$. La condizione per essere definita negativa, invece, implica che di minori principali di A_n alternano i segni.

Vediamo ora il legame tra le matrici definite ed i relativi autovalori. A tale proposito, vale l'importante

Teorema 193 Sia A_n simmetrica ed indichiamo con λ_k , $k = 1, \ldots, n$, gli autovalori della matrice. Allora

a) A_n è definita positiva [risp. definita negativa] se e solo se

$$\lambda_k > 0 , \ \forall k = 1, \ldots, n \qquad [\text{ risp. } \lambda_k < 0 , \ \forall k = 1, \ldots, n \ ] .$$

b) A_n è semidefinita positiva [risp. semidefinita negativa] se e solo se

$$\lambda_k \geq 0 , \ \forall k = 1, \ldots, n \qquad [\text{ risp. } \lambda_k \leq 0 , \ \forall k = 1, \ldots, n \ ] .$$

c) A_n è indefinita se e solo se gli autovalori di A_n cambiano segno ovvero

$$\exists i : \lambda_i > 0 \ \text{ ed } \ \exists j : \lambda_j < 0 \ \text{ con } \ i \neq j .$$

Inoltre,

Proposizione 194 Se A_n é simmetrica ed invertibile allora anche A_n^{-1} è simmetrica.

Dim Sfruttando l'esistenza dell'inversa, la proposizione 131.3-a) e la simmetria di A_n si ricava che:

$$\exists A^{-1} \Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1} \; .$$

Infine,

Teorema 195 Se A_n è definita positiva allora A_n è invertibile, con matrice inversa anche lei definita positiva. Inoltre, tutte le **sottomatrici principali** estratte da A_n (ovvero tutte le matrici quadrate contenenti gli elementi della diagonale principale di A_n) sono definite positive.

Vediamo qualche esempio delle proprietà appena introdotte:

Esempio 196 Siano date le seguenti matrici quadrate di ordine 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

La matrice A è definita positiva, sfruttando il teorema 191-a), perché i suoi minori principali sono

$$D_1 = \det(2) > 0 \;,\; D = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0 \,,\; D_3 = \det(A) = 9 > 0 \; .$$

Riguardo la matrice B, essa è triangolare superiore ma allora i suoi autovalori sono gli elementi della sua diagonale principale (v. osservazione 175-b)). Pertanto, essa è semidefinita negativa, grazie al teorema 193-b) ed al fatto che tali autovalori sono uguali a

$$\lambda_1 = -1 \le 0 \;,\; \lambda_2 = 0 \le 0 \;,\; \lambda_3 = -2 \le 0 \; .$$