# Esercizi Algebra 1 - 25/11/20

(annaspagnolo97@gmail.com, francesco.digiorgio@studenti.units.it)

## Esercizio 1

Sia G un gruppo. Per ogni sottogruppo H di G definiamo:

$$N(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

Si dimostri che:

1. N(H) è un sottogruppo di G;
2. H è un sottogruppo di N(H);
3. H è normale in G se e solo se N(H)=G.

## Esercizio 2

Sia $(\mathbb{Q}, +)$ il gruppo dei numeri razionali, $\mathbb{Z}$ il sottogruppo dei numeri interi e $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ il gruppo quoziente. Si definisca $\varphi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ponendo $\varphi(x) = 3x + \mathbb{Z}$ per ogni $x \in \mathbb{Q}$.

Si dimostri che:

1. l'applicazione $\varphi$ è un omomorfismo di gruppi;
2. l'applicazione $\varphi$ è suriettiva;
3. il nucleo di $\varphi$ è un sottogruppo di $\mathbb{Q}$ contenente $\mathbb{Z}$;
4. il gruppo $\ker\varphi/\mathbb{Z}$ ha ordine 3.

## Esercizio 3

Siano $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ il gruppo moltiplicativo dei numeri reali non nulli, H il suo sottogruppo $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ed $\mathbb{R}^*/H$ il gruppo quoziente. Si ponga $\varphi(xH) = x^2H$ per ogni $x \in \mathbb{R}^*$.

Si dimostri che:

1. l'applicazione $\varphi\colon \mathbb{R}^*/H \to \mathbb{R}^*/H$ è ben definita;
2. l'applicazione $\varphi$ è un endomorfismo del gruppo $\mathbb{R}^*/H$;
3. Il nucleo di $\varphi$ è un sottogruppo di $\mathbb{R}^*/H$ di ordine 2.

## Esercizio 4

Per ogni gruppo $G$ e ogni sottoinsieme $X$ di $G$ si ponga $C_G(X) = \{g \in G \mid gx = xg \text{ per ogni } x \in X\}$.

- Si dimostri che $C_G(X)$ è un sottogruppo di $G$.

Se $N$ è un sottogruppo di $G$ e $g$ è un elemento di $G$, si ponga $\sigma_g(a) = g^{-1}ag$ per ogni $a \in N$.

- Tale posizione definisce un'applicazione $\sigma_g\colon N \to N$ per ogni $g \in G$ se e solo se il sottogruppo $N$ di $G$ è normale: spiegare perchè.

Nel seguito si supponga $N$ sottogruppo normale di $G$.

- Provare che $\sigma_g$ è un automorfismo di $N$.
- Sia $Aut(N)$ il gruppo degli automorfismi di $N$ con l'operazione di composizione di applicazioni. Dimostrare che $\varphi\colon G \to Aut(N)$ definita da $\varphi(g) = \sigma_g$ per ogni $g \in G$ è un omomorfismo di gruppi.
- Dimostrare che $ker\varphi = C_G(N)$.

## Esercizio 5

Sia $G$ gruppo, $g \in G$ e supponiamo che l'ordine di $g$ sia $n$. Verificare che $g^k$ è un elemento di ordine $\frac{n}{d}$, dove $d = MCD(n, k)$.