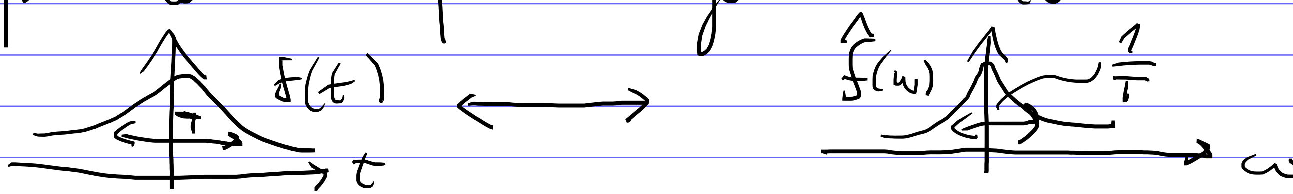
$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$$

estensione a $L^2(\mathbb{R})$ a quadrato sommabile. Motivazioni:

1) definendo $\mathcal{F}$ su L^2 potremo anche definire l'operazione inversa

2) per rendere più rigorosa l'idea:



Riguardo 1): Gaussiana, $e^{-|t|/T}$, $\frac{1}{\cosh(t)}$

abbiamo visto in esempi: $\boxed{\mathcal{F}^2 = 2\pi R}$

$R[f](t) := f(-t)$ (se pari $R[f] = f$)

$\boxed{\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]](t) = 2\pi f(-t)}$ $\forall f$

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}[g] = \frac{1}{2\pi} R \circ \mathcal{F}[g]}$$

Applicando $\mathcal{F}$ ad entrambi i lati:

$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[g]\right]$ vogliamo che sia $= g$

$$\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[R\left[\mathcal{F}[g]\right]\right] = \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}\circ R\circ \mathcal{F}\right)[g]$$

è facile vedere che $\mathcal{F}\circ R = R\circ \mathcal{F}$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{2\pi} R\circ \mathcal{F}^2[g] = R\circ R[g] = g$$

Abbiamo indizi che:

$$\mathcal{F}^{-1}[g] = \frac{1}{2\pi}\left(R\circ \mathcal{F}\right)[g]$$

Però questo richiede di essere in grado di applicare $\mathcal{F}$ due volte ad una funzione.

Non è in generale possibile per $L^1(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$$

ma non tutte le funzioni C^0 sono in L^1, quindi in generale NON possiamo applicare 2 volte

Invece in L^2 si ha: $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

quindi in questo caso è <u>sempre</u> possibile

invertire l'operazione.

[<u>Ex</u>: di funzione L^1 la cui trasformata

NON è L^1 $\qquad g(t) = \theta(T_2 - |t|)$

$$\hat{g}(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin(T_2\omega) \notin L^1$$]

Alcune proprietà di $L^2(\mathbb{R})$:

è lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile $\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, |f(t)|^2 < +\infty$

* $\| f \|_2 := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, |f(t)|^2 \right)^{1/2}$

* proprietà speciale di L^2 : questa norma viene da un prodotto scalare

* Prodotto scalare: $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$(f, g) := \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f^{*}(t)\, g(t)$$

$$= (g, f)^{*}$$

[prodotto scalare $(v, w) = (w, v)$ $*$
ad esempio su $\mathbb{R}^n$ $(v, w) = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i = v^T \cdot w$

simmetrico; quando lo scambio introduce un complesso coniugato: prodotto hermitiano]
(noi chiamiamo anche questo prodotto scalare)

(f, g) è lineare in g

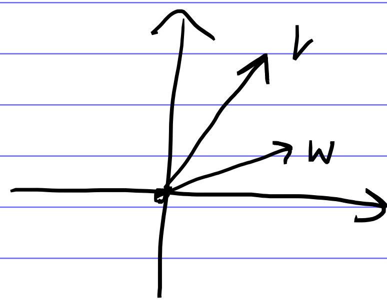
ed è anti-lineare in f

- $(f, \alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha (f, g_1) + \beta (f, g_2)$
- $(\alpha f_1 + \beta f_2, g) = \alpha^* (f_1, g) + \beta^* (f_2, g)$

La norma su $L^2(\mathbb{R})$ è indotta da questo prodotto: $(\|f\|_2)^2 = (f, f)$

[Analogia da tenere a mente

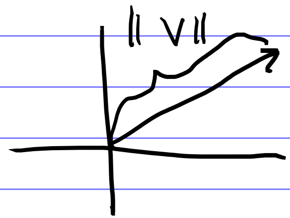
è sempre $\mathbb{R}^n$:



$\mathbb{R}^2$

$$(v, w) = v^T \cdot w = v_x w_x + v_y w_y$$

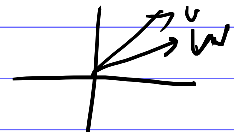
$\Rightarrow$ la norma è data da: $\|v\|^2 = (v, v)$



$$= v_x v_x + v_y v_y$$
$$= v_x^2 + v_y^2 .$$].

• Vale la disuguaglianza di <u>Cauchy-Schwarz</u>:

$$|(f,g)| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

($\mathbb{R}^n$:  $|(v,w)| = |v||w||\cos\theta| \le |v||w|$)

[<u>Dim</u>: considero: $\|f - \lambda g\|_2^2 \ge 0$

con $\lambda = \frac{(g,f)}{\|g\|^2}$ ...]

$$\bullet\ \underbrace{(f,\ \cdot\ )}_{\text{prodotto scalare con } f \in L^2 \text{ fissata}} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$g \longmapsto (f,g)$$

$$\|\cdot\|_2 \qquad\qquad |\ \ |$$

è una mappa continua rispetto alla norma L^2: $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ in norma L^2

$$\Rightarrow (f, g_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (f,g)$$

Perché l'integrale che definisce (f,g) converge?

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f^*(t)\, g(t) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, |f(t)| \cdot |g(t)| \leq \frac{1}{2}\left(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 \right).$$

e basta quindi notare:

$$\left[|f| \cdot |g| \leq \frac{1}{2} |f|^2 + \frac{1}{2} |g|^2 \right]$$

$$\left(\frac{1}{2} (|f| - |g|)^2 \geq 0 \right]$$

<u>Nota</u>: su $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$

<u>NON</u> distinguiamo due funzioni se differiscono solo su un insieme di misura nulla. In realtà quando consideriamo $f \in L^1$ o L^2, tale f è una <u>classe di equivalenza</u> di funzioni. Altrimenti fallirebbe: $\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$.

Vogliamo estendere la definizione di L^1 a L^2.

È necessario perché: $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$

<u>esempio</u>: $\frac{1}{t} \arctan(t)$

$t \sim 0$ è costante $\Rightarrow$ no problem

$t \sim \pm\infty$ va come $1/t \Rightarrow$ il quadrato è integrabile ma la funzione NO.

$\left(\text{viceversa } L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R}) : \frac{1}{\sqrt{|t|}} \frac{1}{1+t^2} \right)$

Fatto generale: se $f \in L^2(\mathbb{R})$ ma non è in $L^1(\mathbb{R})$ è sempre per problemi all'∞.

[Su un intervallo: $L^2(I) \subset L^1(I)$]

Idea: possiamo partire dall'approssimare le funzioni in $L^2(\mathbb{R})$ con funzioni in $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ restringendoci a un intervallo.

Per $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

vale questa importante proprietà:

$$\mathcal{F}[f] \in L^2(\mathbb{R})$$

e $$\boxed{\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2}$$

UGUAGLIANZA (o IDENTITÀ) DI PARSEVAL

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, |\hat{f}(\omega)|^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, |f(t)|^2$$

$$\hat{f}(\omega) = \int dt \, f(t) \, e^{i\omega t}$$

$$\left[f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \, \underbrace{\hat{f}(\omega)} \, e^{-i\omega t} \right]$$