Parità delle permutazioni

1) AZIONE DELLE PERMUTAZIONI SUI POLINOMI

$f \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$

Monomi in $X_1, \dots, X_n$: Prodotti del tipo $X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$

Polinomi in $X_1, \dots, X_n$: Somme formali finite di monomi in $X_1, \dots, X_n$ (moltiplicati per scalari) $k_1, \dots, k_n \geq 0$

funzione polinomiale

$f \rightsquigarrow f : \mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}$

$f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}$

Polinomio

$f, g \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n] \rightsquigarrow f+g$

$\lambda \in \mathbb{Q} \rightsquigarrow \lambda f$

Dare $\sigma \in \Sigma_n$ $\quad \sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ biiettiva

$\rightsquigarrow \sigma_* : \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ $\qquad X_{\sigma(i)} \in \{X_1, \dots, X_n\}$

$$\sigma_*\left(f(X_1, \dots, X_n)\right) \stackrel{def}{=} f\left(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}\right)$$

$$f = X_1^2 X_2 - 3X_1 + X_2 + 1 \qquad \sigma = (1\ 2) \in \Sigma_2$$

$$\sigma_*(f) = X_2^2 X_1 - 3X_2 + X_1 + 1$$

$id_*(f) = f \quad \forall$ polinomio f.

$$\sigma_* : \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$$

$$\sigma_*(f(X_1, \dots, X_n)) = f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$$

σ_* è lineare, infatti: $\sigma_*(\lambda f(X_1, \dots, X_n)) = \lambda f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \lambda \sigma_*(f)$

$\sigma_*(f+g) = \sigma_*(f) + \sigma_*(g)$

Poniamo $\quad P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j) = (X_1 - X_2)(X_1 - X_3) \cdots (X_1 - X_n)(X_2 - X_3) \cdots$

$\cdots (X_{n-1} - X_n)$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{Somme (sommatoria)}$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n \quad \text{(prodotto, produttoria)}$$

$$\sigma \in \Sigma_n \rightsquigarrow \sigma_*(P) = \pm P$$

$$X_i - X_j \overset{\sigma_*}{\rightsquigarrow} X_{\sigma(i)} - X_{\sigma(j)} = \begin{cases} \text{uno degli } X_h - X_k & \text{se } \sigma(i) = h < \sigma(j) = k \\ \text{altrimenti } -(X_k - X_h) & \text{se } h = \sigma(i) > k = \sigma(j) \end{cases}$$

Def $\quad \operatorname{sgn}(\sigma) P = \sigma_*(P)$

$$\operatorname{sgn} \sigma \in \{1, -1\}$$

Es $\quad n = 2 \quad \sigma = (1\ 2)$

$$P = X_1 - X_2$$

$$(1\ 2)_*(P) = X_2 - X_1 = -P \implies \text{sgn}(1\ 2) = -1$$

Calcolo del segno in modo diretto

$\sigma \in \Sigma_n \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \qquad i_k = \sigma(k)$

Diciamo che σ ha un'**inversione** ogni volta che

$i < j \Rightarrow \sigma(i) > \sigma(j)$

$\nu(\sigma) = \#\{\text{inversioni di } \sigma\}$

$\uparrow$

iota

Prop. $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{\nu(\sigma)} = \begin{cases} 1 & \text{se } \nu(\sigma) \text{ pari} \\ -1 & \text{se } \nu(\sigma) \text{ dispari} \end{cases}$

$i < j \Rightarrow \sigma(i) > \sigma(j) \qquad X_i - X_j \longrightarrow -(X_{\sigma(j)} - X_{\sigma(i)})$

Inversionen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$i(\sigma) = 6 \implies \underline{\operatorname{sgn}(\sigma) = 1}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 3)$$

$$i(\sigma) = 3 \implies \operatorname{sgn}(1 \ 3) = -1$$

<u>Prop.</u> Il segno delle permutazioni è moltiplicativo, ovvero

$$\underline{\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\tau} \quad , \forall\ \sigma, \tau \in \Sigma_n$$

<u>Dim</u> Usiamo il polinomio $P = \prod_{1 \le i < j \le n} (X_i - X_j)$

$\sigma, \tau \in \Sigma_n$

$$\sigma_*(P) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot P$$
$$\tau_*(P) = \operatorname{sgn}\tau \cdot P$$

$$\underline{(\sigma \circ \tau)_*(P)} = \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau)\, P$$

$$\| $$

$$\prod_{i<j} \left(X_{(\sigma \circ \tau)(i)} - X_{(\sigma \circ \tau)(j)} \right) =$$

$$= \prod_{i<j} \left(X_{\sigma(\tau(i))} - X_{\sigma(\tau(j))} \right) = \sigma_* \left(\prod_{i<j} \left(X_{\tau(i)} - X_{\tau(j)} \right) \right) =$$

$$= \sigma_*\left(\underline{\tau_*}(P)\right) = \sigma_*\left(\underline{\mathrm{sgn}(\tau)}\, P\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linearità} \\ \text{di } \sigma_*}}{=} \mathrm{sgn}(\tau)\, \sigma_*(P) =$$

$$(\sigma \circ \tau)_*(P) = \underline{\underline{\mathrm{sgn}(\tau)\, \mathrm{sgn}(\sigma)\, P}}$$

$$\| $$

$$\underline{\underline{\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau)\, P}} \implies \boxed{\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}\,\sigma \cdot \mathrm{sgn}\,\tau}$$

$(i\ j) \in \Sigma_n$

$\operatorname{sgn}(i\ j)$ $\qquad i < j \qquad (i\ j) = (j\ i)$

$$(i\ j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & \underline{i-1} & \underline{j} & i+1 & \dots & \underline{j-1} & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$j-(i+1)+1 = j-i$

$j-(i+1) = j-i-1$

$\iota(i\ j) = j-i+j-i-1 =$

$= \underline{2(j-i)-1}$ dispari

$$\Longrightarrow \boxed{\operatorname{sgn}(i\ j) = -1} \qquad \forall \text{ trasposizione } (i\ j)$$

$$\underset{\Sigma_7}{\underset{\cap}{(3\ 6)}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\iota(3\ 6) = 3 + 1 + 1 = 5 = 2(6-3) - 1$$

<u>Def</u> Diciamo che $\sigma \in \Sigma_n$ è una permutazione pari se $\iota(\sigma)$ è pari; σ è dispari se è dispari $\iota(\sigma)$

$$\sigma \text{ è } \begin{cases} \text{pari} \iff \operatorname{sgn} \sigma = 1 \\ \text{dispari} \iff \operatorname{sgn} \sigma = -1 \end{cases}$$

Parità dei k-cicli

$$\sigma = (i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_k) \qquad i_1 \to i_2 \to i_3 \to \cdots \to i_{k-1} \to i_k \to i_1$$

$$j \to j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} - \{i_1, \dots, i_k\}$$

<u>k-ciclo</u>

$$(i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_k) = \underbrace{(i_1 \ i_k)^{-1} \, (i_1 \ i_{k-1})^{-1} \cdots (i_1 \ i_2)^{-1}}_{k-1 \text{ trasposizioni}}$$

$$\operatorname{sgn}(i_1 \cdots i_k) = (-1)^{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ dispari} \\ -1 & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}$$

Parità delle permutazioni come prodotto di trasposizioni

$$\sigma \in \Sigma_n \implies \sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_r \qquad \tau_j \in \Sigma_n \text{ trasposizioni}$$

$$\tau_1^{-1} \quad \tau_2^{-1} \quad \tau_r^{-1}$$

$$\boxed{\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^r}$$

$$\implies r \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } \sigma \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari} \end{cases} \pmod 2$$

$$\operatorname{sgn}(id) = 1 \qquad id = \underbrace{\tau_1 \cdots \tau_r}_{\text{trasposizioni}} \implies r \text{ pari}$$

$$\Sigma_3 = \{ \underset{\underline{1}}{id}, \underset{-1}{(1\,2)}, \underset{-1}{(1\,3)}, \underset{-1}{(2\,3)}, \underset{\underline{+1}}{(1\,2\,3)}, \underset{\underline{+1}}{(1\,3\,2)} \}$$

<u>Segno come omomorfismo</u>

$$\operatorname{sgn} : \Sigma_n \longrightarrow \{1, -1\} \qquad \boxed{n \geq 2}$$

gruppo moltiplicativo

$\operatorname{sgn}(\tau\sigma) = \operatorname{sgn}\tau \operatorname{sgn}\sigma \Rightarrow \operatorname{sgn}$ è <u>epimorfismo</u> (suriettivo)

$$A_n = \operatorname{Ker} \operatorname{sgn} \subset \Sigma_n$$

sottogruppo proprio

<u>gruppo alterno</u> (permutazioni pari)

$$\boxed{\# A_n = \frac{n!}{2}} \qquad \boxed{n \geq 2}$$