PUNTI ESTREMANTI E PUNTI STAZIONARI. MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI E RELATIVI. TEOREMI DI FERMAT, ROLLE E LAGRANGE. CONDIZIONI NECESSARIE E SUFFICIENTI PER MASSIMI E MINIMI RELATIVI. PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO

Sia $y = f(x)$ definita in un intervallo I

M è massimo assoluto di f(x) $\Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall x \in D_f, f(x) \leq M \\ M = f(x_0), x_0 \in D_f \end{array}$

x_0 è punto di massimo assoluto

m è minimo assoluto di f(x) $\Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall x \in D_f, f(x) \geq m \\ m = f(x_1), x_1 \in D_f \end{array}$

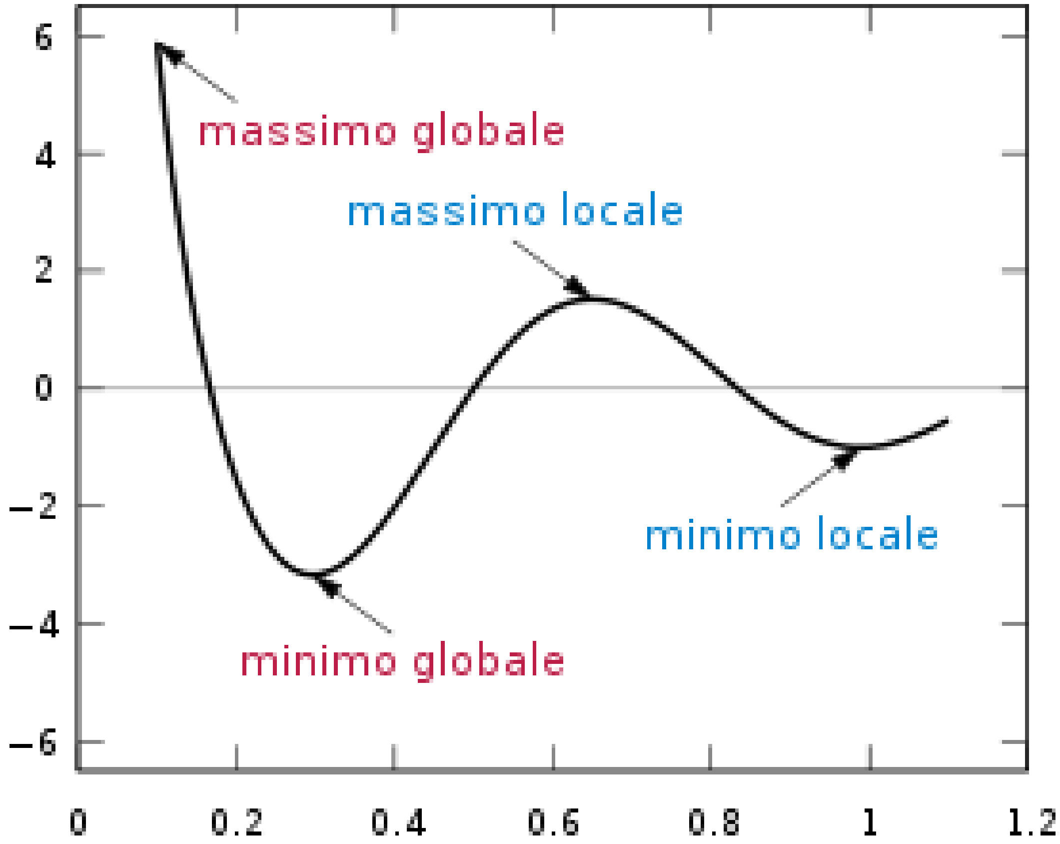
x_0 è punto di minimo assoluto

x_0 è punto di massimo relativo o locale se

$$\exists I \in I(x_0) : \mathrm{f}(x_0) \geq f(x), \forall x \in I$$

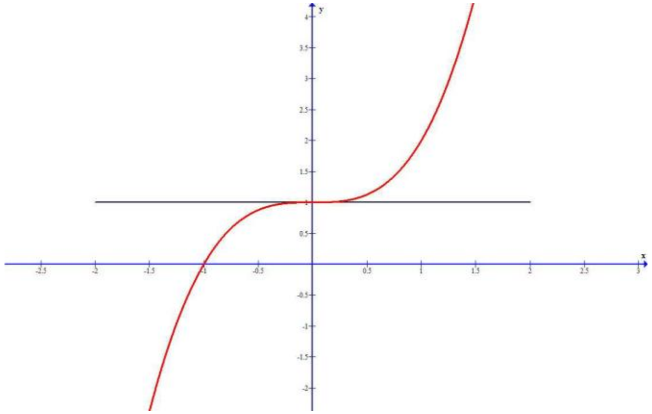
x_0 è punto di minimo relativo o locale se

$$\exists I \in I(x_0) : \mathrm{f}(x_0) \leq f(x), \forall x \in I$$



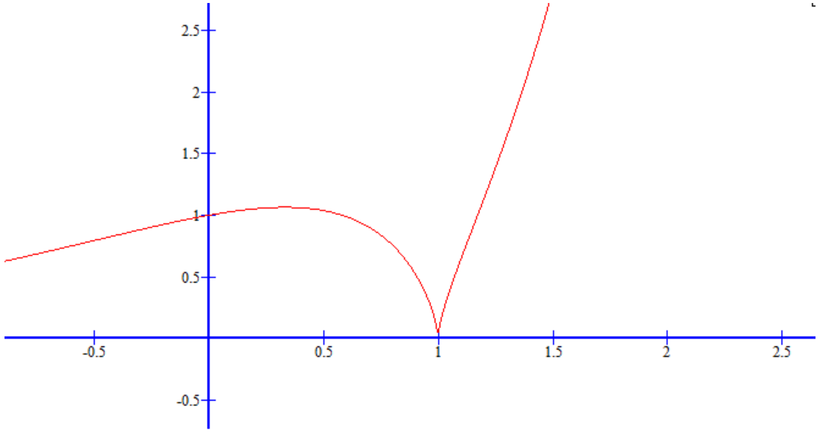
Def. Considerata la funzione f definita in x_0 diremo che x_0 è un punto **<u>estremante</u>** se esso è un massimo o un minimo locale**.**

Def. Considerata la funzione f derivabile in x_0 diremo che x_0 è un punto **<u>stazionario</u>** se $f'(x_0)=0$**.**



$y = x^3 + 1$

Punto stazionario, non estremante



$y = e^x \sqrt[3]{(x-1)^2}$

x = 1 cuspide, punto estremante, non stazionario

Condizione Necessaria per l'esistenza di massimi e minimi relativi

Teorema di Fermat

Sia f :[a,b]→R , derivabile in x_0 appartenente ad (a,b) (punto interno)
Se x_0 è punto estremante per y= f(x) allora f'(x_0)=0.

Dimostrazione.

Supponiamo che x_0 sia un punto di massimo. Allora per ogni x di un opportuno intorno U di x_0 abbiamo che f(x)≤f(x_0). Consideriamo il rapporto incrementale di f in tale intorno e consideriamo separatamente h tendente a zero da destra e da sinistra.

Quindi con h >0, ossia a destra di h, si ha che: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0, h > 0$

Inoltre con h <0, ossia a sinistra di h, si ha che: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0, h < 0$

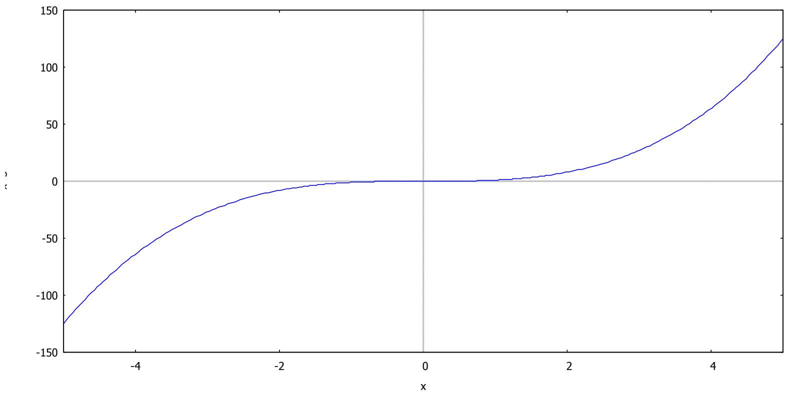
Per il teorema della permanenza del segno, si ha che

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f_+{}'(x_0) \leq 0$$
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f_-{}'(x_0) \geq 0$$

Essendo la funzione derivabile in x_0 allora le derivate destra e sinistra sono uguali, pertanto $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0) = 0$

Osservazione: Tale condizione è **solo necessaria, ma non sufficiente**, in quanto potrebbe accadere che in un punto la retta tangente sia parallela all'asse x, ma tale punto non sia un punto di massimo o di minimo.

Esempio. Flessi a tangente orizzontale.



$y = x^3$

L'asse x è retta tangente in x = 0, ma il punto x = 0 non è estremante. Risulta invece un punto di flesso a tangente orizzontale.

Osservazione.

Il teorema parla di punti interni, ma un massimo o minimo locale si può ritrovare negli estremi dell'intervallo. In tal caso la tangente potrebbe non essere orizzontale.

Inoltre potrebbe capitare di incontrare punti di massimo e minimo relativo tra le cuspidi o i punti angolosi, in cui la funzione non è derivabile.

Ricerca dei punti estremanti

I punti estremanti di una funzione **continua** si ricercano:

- ✓ Nei punti interni (dell'insieme di definizione) in cui la funzione è derivabile, solo tra i punti stazionari (f'(x)=0).
- ✓ Nei punti interni (dell'insieme di definizione) nei punti in cui la funzione NON è derivabile.
- ✓ Nei punti di frontiera (dell'insieme di definizione)

Si aggiungono, separatamente, i punti in cui la funzione non è continua.

Teorema di Rolle

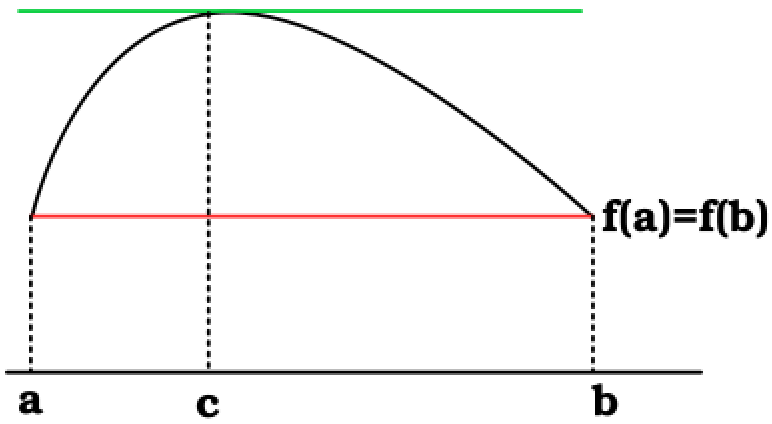
Data una funzione f(x) continua nell’intervallo [a,b] e derivabile nei suoi punti interni, se f(a) = f(b), allora esiste almeno un punto c, interno all’intervallo, per il quale risulta $f'(c) = 0$

Hp:

1) f(x) è continua in [a;b]
2) f(x) è derivabile in (a;b)
3) f(a)=f(b)

Th:

$\exists c \in (a; b): f'(c) = 0$



Teorema di Lagrange o del valor medio

Se y = f(x) è continua in un intervallo chiuso [a,b] ed è derivabile in ogni punto interno ad esso, esiste almeno un punto c interno all'intervallo per cui vale la relazione

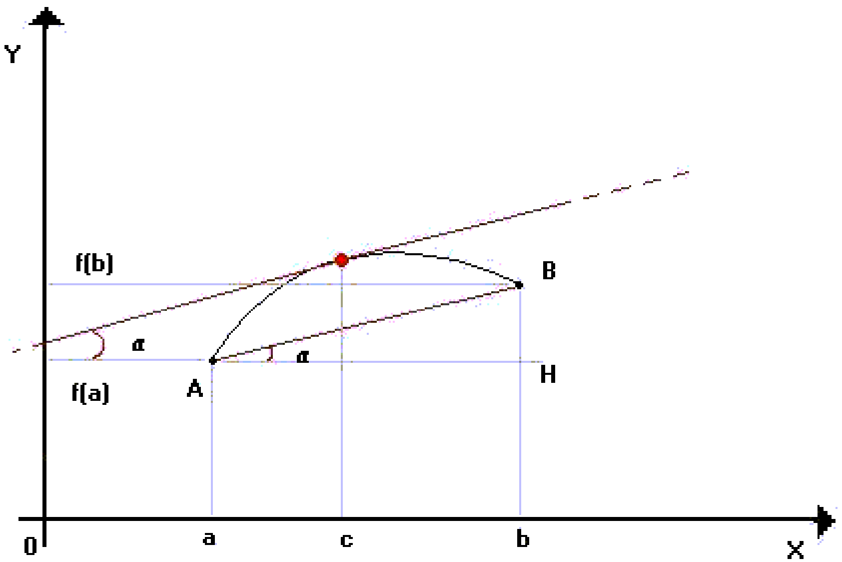
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Hp:

1) f(x) è continua in [a;b]
2) f(x) è derivabile in (a;b)

Th:

$\exists c \in (a;b): \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$



La retta tangente al grafico nel punto di ascissa c è parallela alla retta AB, per cui hanno lo stesso coefficiente angolare

$m_t = f'(c)$ $\qquad m_{AB} = \frac{HB}{AH} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Quindi

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Applicazioni dei teoremi di Rolle e Lagrange:

✓ Determinare se le seguenti funzioni verificano o meno il teorema di Rolle, motivando la risposta. In caso affermativo determinare il punto c previsto dal teorema:

- $f(x) = \ln(-x^2 + 9)$ nell'intervallo [-2; 2]
- $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x < 1 \\ -x^3 + 5 & x \geq 1 \end{cases}$ nell'intervallo [0; 2]

✓ Determinare per quali valori dei parametri a e b la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{2-x} & -1 \leq x < 1 \\ -\dfrac{11}{3}x^2 + bx - \dfrac{11}{3} & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Verifica il teorema di Rolle nell'intervallo [-1; 4]

✓ Determinare se le seguenti funzioni verificano o meno il teorema di Lagrange, motivando la risposta. In caso affermativo determinare il punto c previsto dal teorema:

- $f(x) = \ln x - x$ in $[1; e]$
- $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ in [-2; 1]
- $f(x) = senx + tgx$ in $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Derivata prima e monotonia

Data una funzione y = f(x), continua in un intervallo e derivabile nei punti interni

$$\boldsymbol{y = f(x)\ \ crescente\ in\ I \Leftrightarrow f^{'}(x) \geq 0, \forall x \in I}$$

$$\boldsymbol{y = f(x)\ \ decrescente\ in\ I \Leftrightarrow f^{'}(x) \leq 0, \forall x \in I}$$

La dimostrazione si basa sulla definizione di crescenza e decrescenza di una funzione e sul teorema di Lagrange.

Dim. ⇐

Siano x_1 e $x_2 \in I$ e diversi. Supponiamo $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange, applicato a f(x) nell'intervallo[x_1 ;x_2], si ha che

$$\exists c \in (a;b): \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f^{'}(c)$$

Essendo $x_2 - x_1 > 0$ e per ipotesi $f^{'}(c) > 0$ allora $f(x_2) - f(x_1) > 0$, quindi la funzione è crescente nell'intervallo.
Analogamente si dimostra per la decrescenza.

Una condizione sufficiente per i massimi e minimi relativi

La funzione $y = f(x)$ sia definita e continua in un intorno completo I di x_0 e derivabile nell'intorno I con $x \neq x_0$

1) Ipotesi: a) $f'(x) > 0, \forall x \in I, x < x_0$
   b) $f'(x) < 0, \forall x \in I, x > x_0$

   Tesi: x_0 punto di massimo relativo

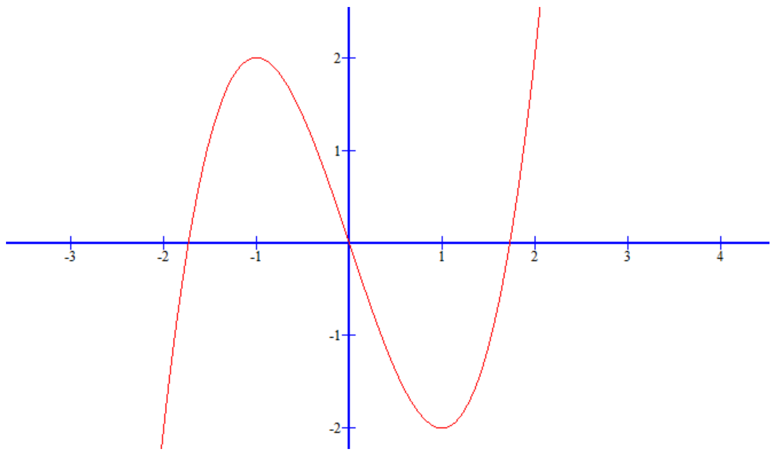
2) Ipotesi: a) $f'(x) < 0, \forall x \in I, x < x_0$
   b) $f'(x) > 0, \forall x \in I, x > x_0$

   Tesi: x_0 punto di minimo relativo

3) Ipotesi: Segno della f'(x) è costante $\forall x \in I, x \neq x_0$

   Tesi: x_0 non è un punto estremante

Esempio: $y = x^3 - 3x$



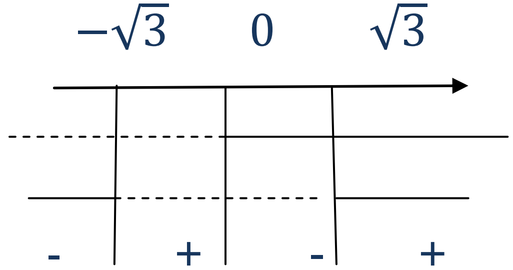
Studiamo la funzione $y = x^3 - 3x$ ricercando i punti estremanti

<u>Dominio</u>: D = R

<u>Studio del segno</u>: $x^3 - 3x \geq 0 \Longrightarrow x(x^2 - 3) \geq 0 \Longrightarrow 1)x \geq 0$

$2)x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3}$

$\Rightarrow$



$y > 0 \quad per \quad -\sqrt{3} < x < 0 \vee x > \sqrt{3}$

$y < 0 \quad per \quad x < -\sqrt{3} \vee 0 < x < \sqrt{3}$

<u>Simmetrie</u>: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ valuto $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$

La funzione è dispari, pertanto il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.

<u>Intersezioni con gli assi</u>:

intersezione con asse x: $\begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 3) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow$

$\begin{cases} x = -\sqrt{3} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad A(-\sqrt{3}; 0) \quad B(0; 0) \quad C(0; \sqrt{3})$

intersezione con asse y: $\begin{cases} y = x^3 - 3x \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ O(0;0)

Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 - 3x = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

- Ricerca di eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 3x}{x} = +\infty$$

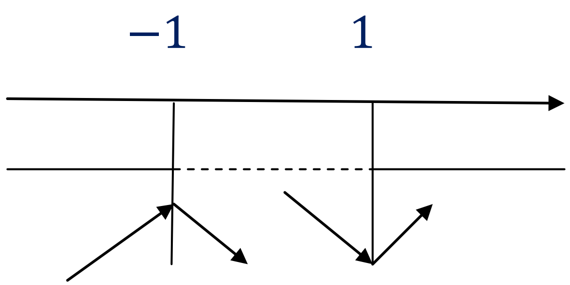
Non esistono asintoti obliqui.

Derivata prima e monotonia:

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ punti stazionari

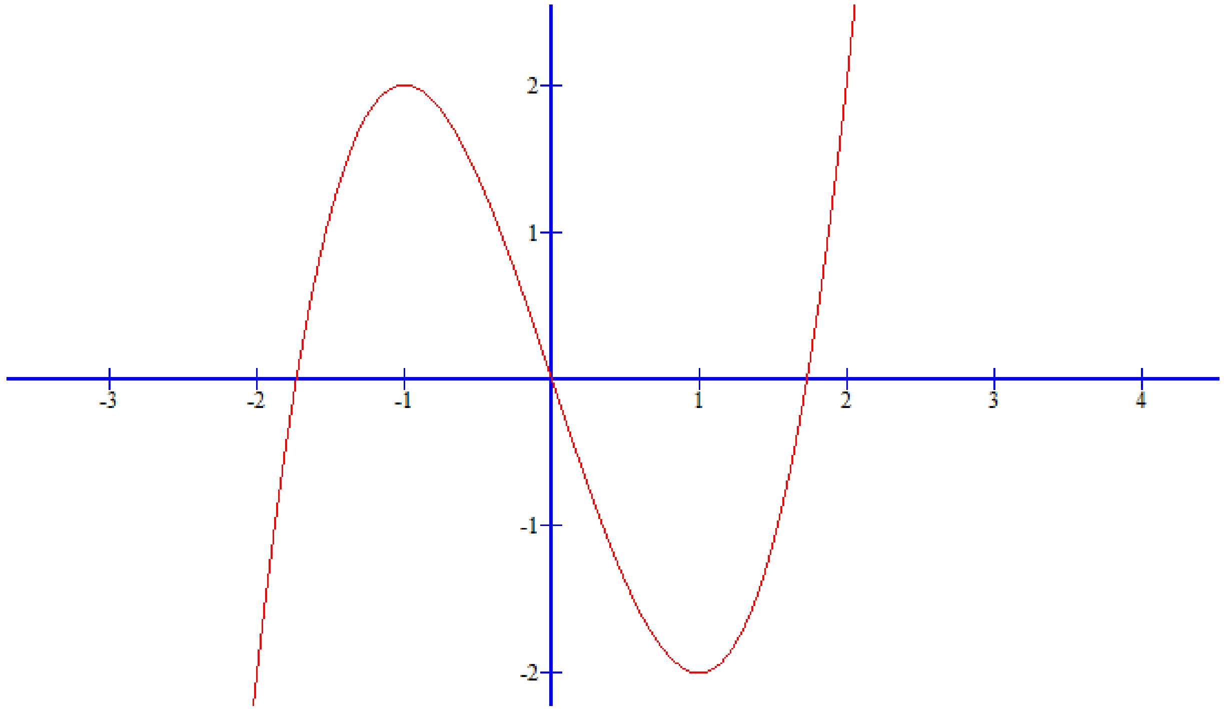
- Segno della derivata prima

$f'(x) = 3x^2 - 3 > 0 \qquad x < -1 \vee x > 1$



Si osserva che la funzione cresce a sinistra e decresce a destra di -1, inoltre decresce a sinistra e cresce a destra di 1. Pertanto:

$x = -1$ punto di massimo relativo
$x = 1$ punto di minimo relativo

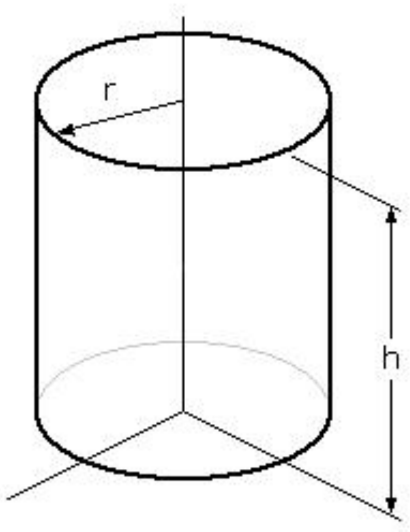


NOTA: Andrebbero ricercati anche i flessi, per i quali è necessario valutare la derivata seconda e studiare la concavità della funzione. (Nella prossima lezione analizzeremo condizioni necessarie e sufficienti per la determinazione dei flessi di una funzione. A qual punto lo studio sarà completo)

Problemi di massimo e minimo (ottimizzazione)

Lattine ecologiche (8.3.7)

Una casa di produzione di lattine decide di costruire lattine ecologiche, ossia lattine che, a parità di volume, possano utilizzare la minima quantità di alluminio possibile.
Il volume lo consideriamo fissato, così come lo spessore dello strato di alluminio, pertanto ciò che desideriamo minimizzare è la superficie di alluminio della lattina stessa.



Schematizziamo la lattina come un cilindro di altezza h e raggio di base r. Il volume è dato da $V = \pi r^2 h$ e l'area della lattina sarà data dalla somma dell'area di base e dell'area della superficie laterale. $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$ (*)

Scegliamo l'incognita $r = x$.

Limitazioni dell'incognita: $x \in \,]0; +\infty[$

Poiché il volume delle lattine si considera fissato, bisognerà scrivere la superficie A in funzione dell'incognita r e dal dato fisso V, facendo invece sparire il parametro h.

Ricavo h dal volume: $h = \frac{V}{\pi r^2}$ e sostituisco nell'espressione (*)

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$$

Per minimizzare tale funzione bisogna calcolarne la derivata prima:

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

Cerchiamo i punti stazionari:

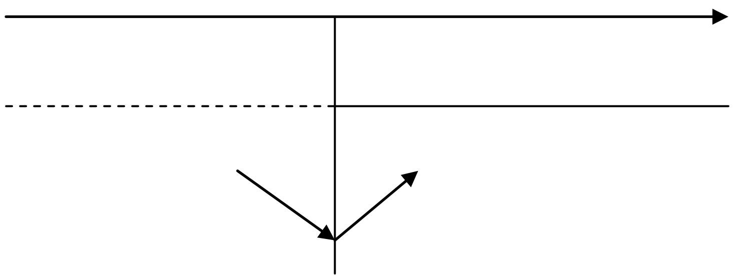
$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \Longrightarrow 4\pi r^3 - 2V = 0 \Longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Per comprendere la natura del punto stazionario trovato, bisogna studiare la crescenza della funzione, ossia il segno della derivata prima.

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} > 0$$

$$\frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2} > 0 \Longrightarrow r > \sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

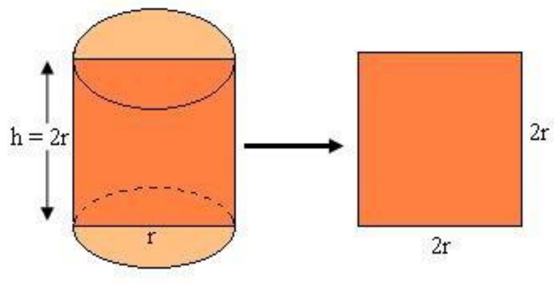
$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$



$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ punto di minimo relativo e assoluto

quindi $r^3 = \frac{V}{2\pi} \Longrightarrow 2\pi r^3 = V$ pertanto il valore di h corrispondente è $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$

Conclusione: A parità di volume, il cilindro di area minima è quello avente l'altezza uguale al diametro di base, ossia un **cilindro equilatero**.



Cilindro equilatero