26 Novembre

$\sin x$ $$P_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j \, x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$\left| \sin(x) - P_{2n+1}(x) \right| = \left| R_{2n+1}(x) \right| = \left| \frac{\sin^{(2n+2)}(c_x)}{(2n+2)!} x^{2n+2} \right|$$

dove c_x sta tra x e 0. $(x_0 = 0)$

$$= \frac{|\sin(c_x)|}{(2n+2)!} x^{2n+2} \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Se ad esempio $|x| \leq 1$ otteniamo

$$\left| P_{2n+1}(x) - \sin x \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!}$$

Prima di parlare della formula di Peano per il resto introduciamo la nozione di "o" piccolo

Def Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, Allora scriviamo che $f(x) = o(1)$ in x_0.

Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione (anche $x_0 = \pm\infty$) e siano $f, g : X \setminus \{x_0\}$, sia $g(x) \neq 0$ $\forall\, x \neq x_0$, Allora scriviamo che $\underline{f(x) = o(g(x))}$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

<u>Esempio</u> In $+\infty$ abbiamo $1-th(x) = o(x^{-n})$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Qui sto dicendo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-th(x)}{x^{-n}} = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1-th(x)}{x^{-n}} = \frac{2e^{-2x}\frac{1}{1+e^{-2x}}}{x^{-n}} = 2\,\frac{e^{-2x}}{x^{-n}}\,\frac{1}{1+e^{-2x}} = 2\,\frac{x^n}{e^{2x}}\,\frac{1}{1+e^{-2x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-th(x)}{x^{-n}} = 2\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{2x}}}_{0}\;\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-2x}}}_{1} = 0$$

__Esercizio__ Dimostrare che $o(x^n) = x^n o(1)$ in 0.

Si tratta di dimostrare che in 0

$$f(x) = o(x^n) \iff f(x) = x^n o(1)$$

__Dim__ $\Rightarrow$ Partiamo da $f(x) = o(x^n) = x^n \frac{o(x^n)}{x^n}$

Siccome $\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0 \Rightarrow \frac{o(x^n)}{x^n} = o(1) \Rightarrow f(x) = x^n o(1)$

Supponiamo ora $f(x) = x^n o(1)$

Per dimostrare che $f(x) = o(x^n)$ dobbiamo dimostrare

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^n}\, o(1)}{\cancel{x^n}} = \lim_{x \to 0} o(1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = o(x^n)$$

2) $$o(x^3) = x^3 o(1) = x\, o(x^2) = x^2 o(x)$$

3) $$o(2x) = o(x)$$

$$f(x) = o(2x) \iff f(x) = o(x)$$

$$f(x) = o(2x) \iff \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{2x} = 0 = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$\iff \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \iff f(x) = o(x)$$

4) Sempre Nello 0

$$o(x^3)+o(x^2)=o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{o(x^3)}{x^2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[x\,\frac{o(x^3)}{x^3}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 0}x}_{0}\;\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}}_{0}+\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}}_{0}=0$$

Formula di Peano

Teorema Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. Supponiamo $f^{(k)}(x)$ siano definite $\forall\, x\in(a,b)$ se $k<n$ e che $f^{(n)}(x_0)$ sia definito (Per $n=0$ assumiamo f continua in x_0). Consideriamo $P_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$,

il resto $R_n(x)$ e l'espressione $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

Allora $\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$ o (equiv.) $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$.

Dim $\quad R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ significa

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-P_n'(x)}{n\,(x-x_0)^{n-1}} = \dots$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0} \frac{\left(f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)\right) - \overbrace{\left(f^{(n-1)}(x_0)-P_n^{(n-1)}(x_0)\right)}^{0}}{x-x_0}$$

$$= \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0)-P_n^{(n)}(x_0)\right) = 0$$

<u>Lemma</u> Sia $p(x)$ un polinomio di grado $\leq n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Se $p(x) = o((x-x_0)^n) \Longrightarrow p \equiv 0$

<u>Dim</u>

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Supponiamo che $\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = 0$. Se per assurdo esiste un $p^{(k_0)}(x_0) \neq 0$ $0 \leq k_0 \leq n$ possiamo supporre che k_0 sia il più piccolo indice t.c. $p^{(k_0)}(x_0) \neq 0$

$$\frac{P(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

$$\frac{P(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = \frac{\frac{P^{(k_0)}(x_0)}{k_0!}(x-x_0)^{k_0} + \sum_{k=k_0}}{(x-x_0)^n}$$

$$= \frac{\frac{P^{(k_0)}(x_0)}{k_0!}(x-x_0)^{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} \qquad k = j + k_0$$

$$= \frac{\frac{P^{(k_0)}(x_0)}{k_0!}(x-x_0)^{k_0} + \sum_{j=1}^{n-k_0} \frac{P^{(j+k_0)}(x_0)}{(j+k_0)!}(x-x_0)^j (x-x_0)^{k_0}}{(x-x_0)^n}$$

$$= \frac{(x-x_0)^{k_0}}{(x-x_0)^n}\left[\frac{P^{(k_0)}(x_0)}{k!} + \sum_{j=1}^{n-k_0} \frac{P^{(j+k_0)}(x_0)}{(j+k_0)!}(x-x_0)^j\right] \xrightarrow{x \to x_0} ?$$

$$(x-x_0)^{k_0-n}\left(\frac{P^{(k_0)}(x_0)}{k_0!}+o(1)\right)$$ dove $0<k_0\le n$

Se ad esempio $n=k_0$ ho

$$\frac{P^{(k_0)}(x_0)}{k_0!}+o(1)\xrightarrow{x\to x_0}\frac{P^{(k_0)}(x_0)}{k_0!}\neq 0 \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

$=0$ Assurdo

Se invece $n<k_0$

$$\lim_{x\to x_0^{\pm}}\underbrace{(x-x_0)^{k_0-n}}_{\pm\infty}\left(\frac{P^{(k_0)}(x_0)}{k_0!}+o(1)\right)=\pm\infty$$

Esercizio Dimostrare che $f(x) = \dfrac{[x]+1}{[x]^4+[x]+1}$

ha punti di massimo e minimo assoluto in $\mathbb{R}$.

Osservazioni Dominio di $f = \mathbb{R}$ perché

$$y^4+y+1 > 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Infatti per $|y|<1 \Rightarrow y>-1 \Rightarrow y+1>0$

Se invece $|y| \geq 1 \Rightarrow y^4+y+1 \geq y^2+y+1 > 0$ perché $\sqrt{1^2-4}$ non è reale

$$f(x) = \frac{[x]+1}{[x]^4+[x]+1}$$

Per $x<-1$ ho $[x]+1<0$