

Risultati principalmente  
 ottenuti "mettendo le mani  
 sul RETICOLO (Lattice)",  
 cioè  $\mathbb{R}^4 \rightarrow$  reticolo  $\mathbb{Z}^4$

0 0 0 / Esempi:  $\mathbb{Z}^2$   
 0 0 0  
 0 0 0  
 L

$\Rightarrow$  c'è distanza minima  $L \Rightarrow$  en. max  $\frac{1}{L} \sim$  cutoff delle forme.

$\rightarrow$  conti numerici danno risultati qualitativi (approssimati).

$\rightarrow$  Esempio: "YM ha un MASS GAP  $m \sim \Lambda_{QCD}$ ".

## Materia

Teoria di gauge non-abeliana con  $N_f$  fermioni in rep.  $R_f$  di  $G$   
 e  $N_s$  scalari in rep.  $R_s$  di  $G$ .

$$\rightarrow S = S_{YM} + S_f + S_s$$

$$S_f = \int d^4x (i \bar{\psi} \not{D} \psi - m \bar{\psi} \psi)$$

$$S_s = \int d^4x (D_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - V(\phi))$$

(Se abbiamo  $n$  fermi di scalari, possiamo anche introdurre  
 termini di Yukawa  $\sim \phi \bar{\psi} \psi \in R_s \otimes \bar{R}_f \otimes R_f = \mathbf{1} \otimes \dots$ )

E.s. SM:  $2 \otimes 1 \otimes 2 = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$  di  $su(2)_L$

Beta function:

$$\beta(g) = \beta_0 g^3 + \dots$$

Contrib. ghost  
+  $\frac{1}{3} C(\text{Adj})$

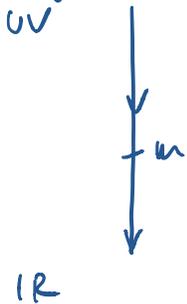
$$\text{dove } \beta_0 = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} N_f C(R_f) - \frac{1}{3} N_s C(R_s) \right]$$



contributo di MASSLESS fields

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} - \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} N_f C(R_f) - \frac{1}{3} N_s C(R_s) \right] \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}$$

RG flow è lungo side di eu.



Se un campo ha una massa  $m$ ,  
esso viene visto come campo MASSLESS  
a scale  $E \gg m$ ; invece a scale  
 $E \ll m$  il campo non propaga e  
può essere "integrato via" (integrated out)  
e non partecipa al running di  $g(\mu)$ .

## IR PHASES of QCD-like theories

Consideriamo teorie con  $N_s = 0$ , con

gruppo di gauge  $SU(N_c)$  ( $N_c$  viene detto  $n^2$  di colori)

e  $N_f$  fermioni in rep. fondamentale ( $R_f = N_c$ )

$$\Rightarrow C_2(G) = N_c \quad C(R_f) = 1/2$$

$$\frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} - \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right] \ln \frac{\mu_0^2}{\mu^2}$$

Avremo una diversa dinamica  
a seconda del valore di  $\frac{N_f}{N_c}$

IR FREE PHASE  $N_f > \frac{11}{2} N_c \rightarrow \beta_0 > 0$

$\Rightarrow g(\mu)$  è sempre più DEBOLE andando nell'IR :  
possiamo fidarci dei conti semiclassici ma abbiamo  
bosoni di gauge e fermioni assolutamente accoppiati

Quando  $N_f = \frac{11}{2} N_c \rightarrow$  la funzione  $\beta$  è nulla  
a 1-loop

$\Rightarrow$  in sopra a  $\beta$  è  $> 0$ ,  $< 0$  o  $= 0$  dobbiamo  
calcolare il contributo a 2-loop ( $\beta_1$ )  
( la teoria è ancora IR-free in  $N_f = \frac{11}{2} N_c$  )

CONFORMAL WINDOW  $N_f$  appena sotto  $\frac{11}{2} N_c$

$$\beta(g) = \beta_0 g^3 + \beta_1 g^5 + \dots = g^3 (\beta_0 + \beta_1 g^2)$$

$\uparrow$                        $\uparrow$   
 1-loop                2-loop

$$\beta_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( -\frac{11}{3} N_c + \frac{2}{3} N_f \right)$$

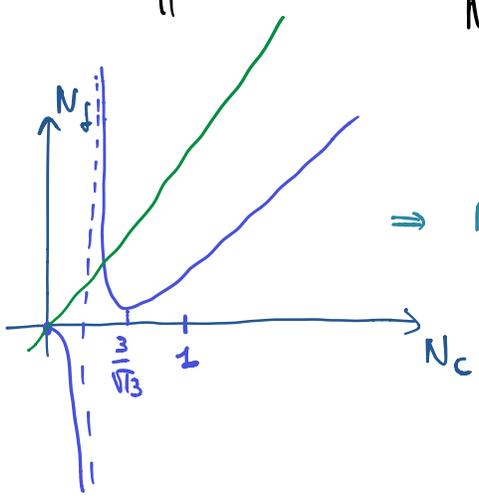
$$\beta_1 = \frac{22}{3} N_c^2 - \frac{11}{2} N_f \quad \text{in } N_f = \frac{11}{2} N_c$$

$$\beta_1 = \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left( -\frac{34}{3} N_c^2 + \frac{N_f (N_c^2 - 1)}{N_c} + \frac{10}{3} N_f N_c \right)$$

$$\beta_1 > 0 \quad (\beta_0 = 0)$$

$\beta_1 > 0$  quando  $N_f > \frac{34}{13N_c^2-3} N_c^3$  • ha min a  $N_c^2 = 9/13$

$\beta_0 < 0$  "  $N_f < \frac{11}{2} N_c$  •



$\Rightarrow N_f \geq 1 \quad \frac{11}{2} N_c > \frac{34 N_c^3}{13 N_c^2 - 3}$

Quando  $\frac{34 N_c^3}{13 N_c^2 - 3} < N_f < \frac{11}{2} N_c \Rightarrow \beta(g)$  ha uno zero

$\ln \quad g_*^2 = -\frac{\beta_0}{\beta_1}$

$\beta_0, \beta_1$  dipendono da  $N_c, N_f \rightarrow$  il valore di  $g_*$  dipende pure da  $N_c, N_f$

Mettiamoci in  $\frac{N_f}{N_c} = \frac{11}{2} - \epsilon$  ( $\epsilon$  piccolo)

$g_*^2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right) \cdot \frac{1}{2N_c}$

$\frac{1}{(4\pi)^4} \left( -\frac{34}{3} N_c^2 + \frac{3 N_f (N_c^2 - 1)}{3 N_c} + \frac{10 N_f N_c}{3} \right) \cdot \frac{1}{2N_c}$

$= \frac{16\pi^2 \left( \frac{N_f}{N_c} - \frac{11}{2} \right)}{N_c \left( -17 + \frac{3}{2} \frac{N_f}{N_c} \left( \frac{N_c^2 - 1}{N_c^2} \right) + \frac{5 N_f}{N_c} \right)}$

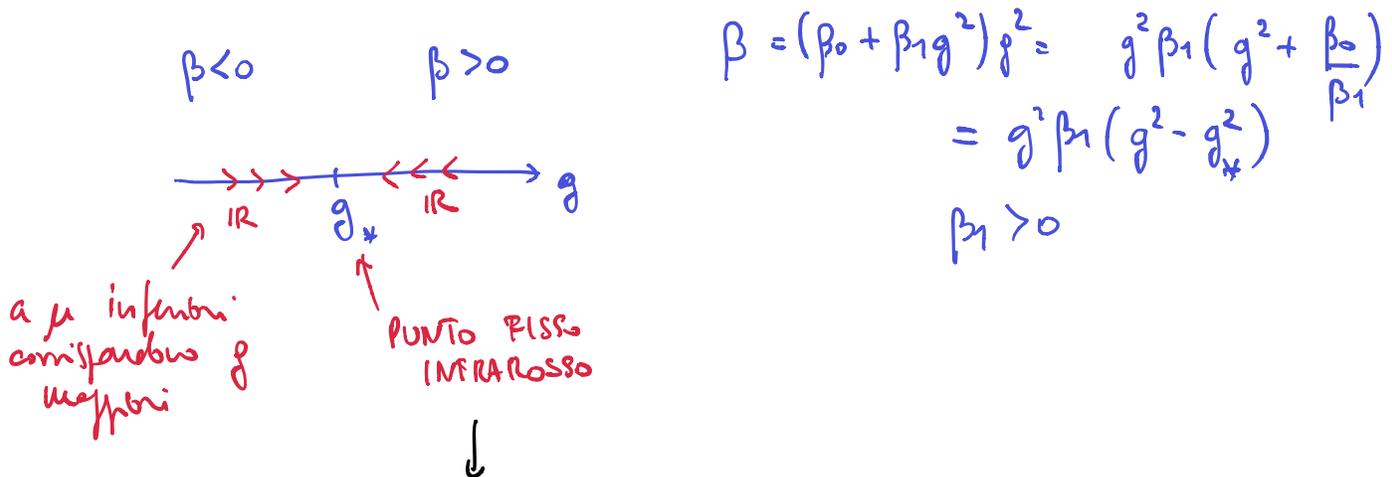
$\frac{N_f}{N_c} = \frac{11}{2} - \epsilon \rightarrow$

$g_*^2 = \frac{-16 \pi^2 \epsilon}{N_c \left( -17 + \frac{13}{2} \cdot \frac{11}{2} - \frac{37}{4N_c^2} + 6(\epsilon) \right)} = \frac{64 \pi^2 N_c}{75 N_c^2 - 33} \epsilon + 6(\epsilon^2)$

$\mu \ll 1 \rightarrow \boxed{g_*^2 \ll 1} \rightsquigarrow$  teoria è *debolm. accoppiata*

In particolare, l'analisi PERTURBATIVA che abbiamo fatto è VALIDA.

Cioè la teoria a bassa energia è descritta da una teoria debolmente accoppiata di cui come pt fisso del RG è un IR, sotto transf. di scala (e "punti" CONFORME) "Banks-Zaks fixed pt"



è una teoria CONFORME

(simmetria CONFORME vincola molto la teoria, permettendo di trovare risultati altrimenti molto difficili)

(In IR free phase, il pt fisso IR è  $g=0$ , cioè la teoria conforme corrisp. è TRIVIALE)

Calcolo  $\frac{N_f}{N_c}$ : il risultato precedente ci dice che c'è un pt fisso IR non-triviale, almeno finché

vale la teoria delle perturbazioni, cioè  
fino  $N_f > \frac{34 N_c^3}{13 N_c^2 - 3}$  quando  $g_* \sim 1$ .

Per  $N_f$  superiori la teoria è fortem. accoppiata  
attorno a  $g_*$  e non possono più fidarsi  
dei conti a 2-loop.

In generale uno si aspetta che ci sia un pt fis IR non-triv.  
in

$$N_* < N_f < \frac{11}{2} N_c \quad \text{"FINESTRA CONFORME"}$$

in un certo valore critico  $N_*$ . Qual è il suo valore?

Conti numerici sul reticolo : c'è un'evidenza

che in  $N_c = 3$  si ha  $N_* \in [8, 12]$ ;

inoltre ci si aspetta l'andamento  $N_* \approx (3-4) N_c$

Per  $N_f \in N_*$   $\beta < 0 \rightarrow$  nell'IR la cost. di accoppi.  
è suff. forte per portare al  
**CONFINAMENTO** (tutti i quark

a eccezione finita sono  
singoletti di gauge)

le maggior parte degli stati sono MASSIVI con  $m \sim \Lambda_{QCD}$

Pero rimangono dei  $\text{NOD}$  MASSLESS : infatti

$$\langle \Psi_i^L \Psi_j^R \rangle \sim \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N_c$$

cont. su reticolo diverso  $\neq 0$

Questo  $\Lambda_{QCD}$  (vacuum expect. value) rompe <sup>SPONTANEAMENTE</sup> una  
 simmetria globale della teoria delle

### CHIRAL SYMMETRY

→ BOSONI DI GOLDSTON

( $\pi^i \pi^{\pm}$  se sym è SU(2)  
 otetto se sym è SU(3))

QCD :  $N_c = 3$   $N_f = 6$

$\Lambda_{QCD} \sim 300 \text{ MeV}$

	$m \text{ (MeV)}$
d	4
u	2
s	95
c	1250
b	4200
t	170'000

$m_u, m_d \ll \Lambda_{QCD}$

$m_s < \Lambda_{QCD}$

$m_c, m_b, m_t \gg \Lambda_{QCD}$

→ c, b, t "disappear"  
 prima di  
 raggiungere  $\Lambda_{QCD}$   
 nel RG flow  
 nel IR

in l'ordine IR

$N_f = 3$

Sim. globale

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \longrightarrow SU(3)_V$$

$\langle \bar{\psi}_i \psi_j \rangle \neq 0$

$i, j = 1, \dots, 3 = N_f$

$$\psi_{L_i}^{\dagger} \psi_{L_i} + \psi_{R_j}^{\dagger} \psi_{R_j}$$

$$m(\psi_L^{\dagger} \psi_R + \psi_R^{\dagger} \psi_L)$$

Particelle di osservazione (ADRONI) sono simpliti di quark

quarks →  $9 \otimes 9$

$9 \bar{9}$

MESONI

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$$

$\pi^{\pm}, \pi^0$   
 $K^{\pm}, K^0$

rep. di  
 FLAVOUR  
 SYM

$$\rightarrow 3 \otimes 3 \otimes 3$$

BARIONI

$u \bar{u} \quad d \bar{d} \quad s \bar{s} \rightarrow 1$