

ASPETTI TOPOLOGICI

Consideriamo una teoria di comp in $d=1$, ad es. i esempi sono funzioni

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Q} \quad \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{Q} \\ x^a \mapsto \phi(x) \end{array} \right)$$
$$t \mapsto \varphi(t)$$

\mathcal{Q} viene detto SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI. Ci concentriamo ora su spazi \mathcal{Q} topol. non-triviali con $\pi^1(\mathcal{Q}) \neq 0$

$\pi^1(\mathcal{Q})$ è il GRUPPO FONDAMENTALE di \mathcal{Q} :

- consideriamo i loop (curve chiuse) in \mathcal{Q} , cioè

$$\gamma: [0,1] \rightarrow \mathcal{Q} \quad \text{t.c.} \quad \gamma(0) = \gamma(1)$$

chiamiamo $\mathcal{L}(\mathcal{Q})$ lo spazio dei loop di \mathcal{Q}

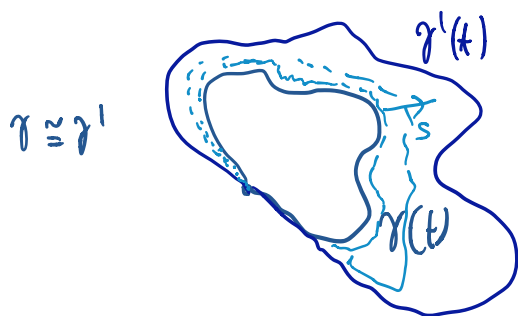
- prendiamo la relazione di equivalenza data dalle omotopie:

$$\gamma \cong \gamma' \quad \text{se} \quad \exists \text{ omotopia (funz. continua)}$$

$$\alpha: \underbrace{[0,1]}_{t_0} \times \underbrace{[0,1]}_{s_0} \rightarrow \mathcal{Q}$$

(Per ogni valore di s fissato mi def. una curva)

$$\text{t.c.} \quad \alpha(t,0) = \gamma(t) \quad \alpha(t,1) = \gamma'(t)$$



- Tutti i loop deformabili in maniera continua l'uno nell'altro stanno in una classe di equivalenza.

- Possiamo costruire lo spazio quoziente (con l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza)

$$\mathcal{L}(Q) / \sim \cong \pi^1(Q)$$

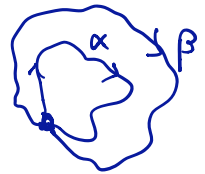
↑
ha una struttura di GRUPPO:

il prodotto è costruito a partire da $\mathcal{L}(Q)$

$$\alpha, \beta \in \mathcal{L}(Q)$$

$$\alpha * \beta (t) \equiv \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t < 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\alpha(1) = \beta(0)$$



* che prodotto che soddisfa condiz. di gruppo in $\pi^1(Q)$:

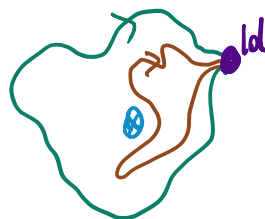
- $Id = [\text{loop costante}] \quad \gamma(t) = \gamma_0$
- Invert $[\gamma(t)]^{-1} = [\gamma(1-t)]$
- Associatività e riflettività

- if $\pi^1(Q) \neq 0 \rightarrow Q$ NON è SEMPLICEMENTE CONNESSO
 \rightarrow ci sono loop che non sono equivalenti all'identità, cioè non possono essere contratti a un pto.

Esempi 1) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\pi^1 \cong \mathbb{Z}$$

↑
gruppo con +



$$\alpha \neq \beta$$

112
8

Un loop che gira n volte attorno {0} \neq a un loop " " m " " " {0} se $n \neq m$

$$[\gamma_n] \cdot [\gamma_m] = [\gamma_{n+m}] \quad (\text{isomorfismo di gruppi})$$

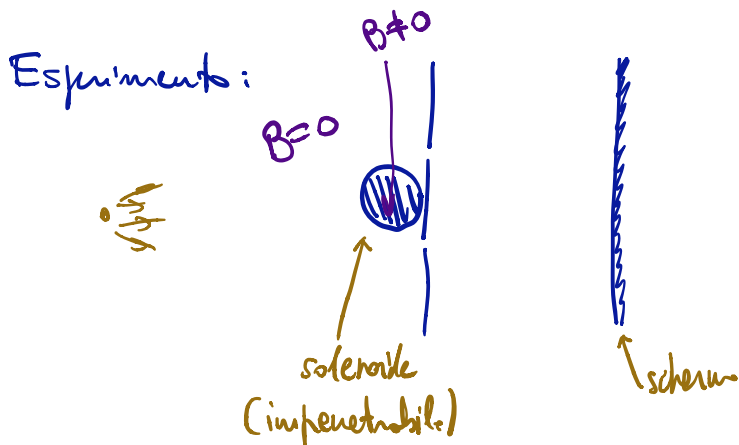
$$2) \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{cilindro infinito}\} \quad \pi^1 \cong \mathbb{Z}$$

AHARONOV-BOHM EFFECT

[Consideriamo una particella di x massa in Q , la sua traiettoria è descritta da un CAMPO

$$x: \mathbb{R} \rightarrow Q \quad (1 \text{ dim})$$

(possiamo interpretare la lagrangiana della particella $L(x, \dot{x})$ come la lagrangiana di una teoria di campo 1dim.)]



Le frange di interferenza sullo schermo cambiano se variamo B ; si ripetono uguali dopo aver variato B di $\frac{2\pi\hbar c}{e}$.

Sp. delle confj. $Q = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{cilindro}\} \Rightarrow \pi^1(Q) = \mathbb{Z}$

Consideriamo un potenziale vettore

$$A = \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi$$

Labels: θ (parametro arbitrario), $d\varphi$ (angolo azimutale)

$$\Rightarrow B = dA = 0$$

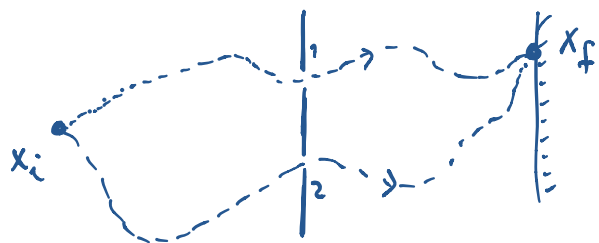
classicamente ci aspetta forza nulla sulla particella

$$\oint_{S^1} A = \int_0^{2\pi} \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi = \frac{\theta \hbar c}{e}$$

$$\oint_{\partial D = S^1} A = \int_D B = \Phi_B \Rightarrow \theta = \frac{e}{\hbar c} \Phi_B$$



Consideriamo il caso senza solenoide



Amplitude di proba per una particella di essere misurata in x_f al tempo T se partita da x_i al tempo 0 è

$$K(x_f, x_i; T, 0) = \int \mathcal{D}x e^{iS[x]/\hbar} =$$

{ tutte le traiettorie con
 $x(0) = x_i \quad x(T) = x_f$ }

$$= \int \mathcal{D}x e^{iS_1/\hbar} + \int \mathcal{D}x e^{iS_2/\hbar}$$

{traiett. n° 1} {traiett. n° 2}

↑
 ampiezza di proba.
 quando la fenditura 2
 è CHIUSA

↑
 ampiezza di proba.
 prob la fenditura 1
 è CHIUSA

$$= K_1(x_f, x_i; T, 0) + K_2(x_f, x_i; T, 0)$$

Se le fasi di K_1 e K_2 sono la stessa, abbiamo interferenza costruttiva; se le fasi sono opposte, abbiamo interf. distrutt.

Accendiamo $B \neq 0$, cioè $\theta \neq 0 \rightarrow$ l'azione della particella carica cambia e viene aggiunto il termine

$$\int \mathcal{L}_A = -\frac{e}{c} \int dt \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} = -\frac{e}{c} \int \vec{A} \cdot d\vec{x} = -\frac{e}{c} \int A$$

↳ integrale di A lungo traiettoria γ

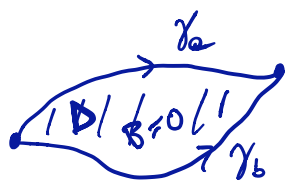
$A \bar{e} \text{ cost} \Rightarrow L_A = \frac{d}{dt} (\bar{x} \cdot \bar{A}(-\frac{e}{c}))$ \bar{e} una DERIVATA TOTALE

\Rightarrow le equazioni del moto (classiche) non vengono modificate.

Abbiamo aggiunto un nuovo termine in $S \Rightarrow$ come cambia l'integrale sui cammini?

Notiamo che $\int_{\gamma} \bar{A} \cdot d\bar{x}$ dipende SOLO DAI PTI INIZIALI E FINALE se la traiettoria passa in la STESSA FENDITURA:

$$\hookrightarrow \int_{\gamma_a} A - \int_{\gamma_b} A = \int_{\gamma_c} A + \int_{-\gamma_b} A = \oint_{\partial D} A = \int_D B = 0$$



\uparrow
se $B=0$ dentro D (cioè γ_a e γ_b passano in stesse fendit.)

\Downarrow

$$K_i (B \neq 0) = \int_{\gamma \in \text{fendit } i} dx e^{iS_{cl} - \frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma} A} \quad \leftarrow \text{non dip. da } \gamma = e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma} A} K_i (B=0)$$

e con pt. iniz. e fin $x_i \quad x_f$

$B=0 \quad k = k_1 + k_2 = \rho (e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}) = \rho e^{i\phi_1} (1 + e^{i(\phi_2 - \phi_1)})$

ϕ_{12} fase relativa

$B \neq 0 \quad K_B = e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma_1} A} k_1 + e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma_2} A} k_2$

$$= \rho (e^{i\phi_1'} + e^{i\phi_2'}) = \rho e^{i\phi_1'} (1 + e^{i(\phi_2' - \phi_1')})$$

ϕ_{12}'

$$\phi_{12}' = \phi_{12} - \frac{e}{\hbar c} \int_{\gamma_1 - \gamma_2} A = \phi_{12} - \frac{e \Phi_B}{\hbar c}$$

↓
diverso pattern di interferenza

A e A' sono equiv. (producono la stessa dinamica)

se $\oint A' = \oint A + \frac{\hbar c}{e} 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

$$A = \frac{\hbar c}{2\pi e} d\phi$$

$\Rightarrow A$ e equiv. a A' se $\theta - \theta' = 2\pi n$

- Diverse scelte di A sono parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$
 - Classicamente, tutti i valori di θ danno la "stessa teoria" (Lagrangiana equiv.), mentre quantisticamente le "teorie" sono inequivalenti
- ↓

abbiamo diverse "teorie" quantistiche corrispondenti
a una "teoria classica" (parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$)

(ci sono quantizzazioni inequivalenti
di una teoria classica)

↓
caratteristico di spazi della config.

NON semplicemente connessi

(cioè $\pi^1(Q) \neq 0$)

$P1$ e spm e $\pi^1(Q) \neq 0$

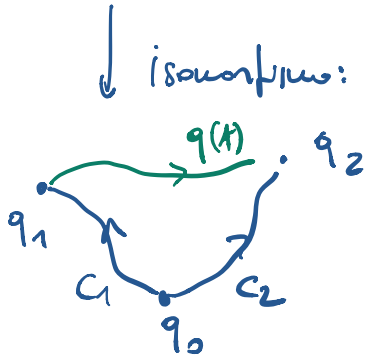
$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \int \mathcal{D}q \ e^{iS/q}$$

{ tutti i cammini da
uniscano q_1 con q_2 }



appartengono a classe di omotopia

Ci sono tante classi di omotopia di cammini da q_1 a q_2
 queste classi di omotopia di loop da iniziare e finire
 in un pto p_0 , cioè elem. di $\pi^1(Q)$



cammino loop

$$[q] \leftrightarrow [c_2^{-1} \cdot q \cdot c_1]$$

Nota: classi di omotopia sono insieme disgiunti di cammini

Definiamo $K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1) = \int \mathcal{D}q_\alpha \ e^{iS/q}$

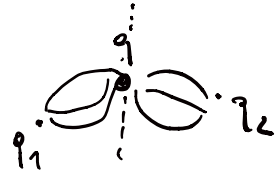
{ cammini da q_1 a q_2
 nella classe di omotopia α e $\alpha \in \pi^1(Q)$ }

$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \sum_{\alpha \in \pi^1(Q)} \chi(\alpha) \cdot K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1)$$

soddisfa le proprietà di un'ampiezza di prob. deve
 soddisfare quando

1) K non dipende dalla scelta di c_1 e c_2

$$2) \quad K(p_2, t_1; q_2, t_2) = \int_{t_1 < t < t_2} dq \, K(p_2, q; t_2, t) K(q, p_1; t, t_1)$$



Qto avviene se i $\chi(\alpha)$ soddisfano:

$$\chi(\beta \cdot \alpha) = \chi(\beta) \chi(\alpha)$$

$\chi(\alpha)$ forma una rapp. 1-dimensionale unitaria
del gruppo fondamentale } (*)

$$\chi: \pi^1(Q) \rightarrow \{e^{i\varphi}\} \quad \leftarrow \text{"CARATTERI" di } \pi^1(Q)$$

$$(|\chi(\alpha)| = 1)$$

Se $\pi^1(Q) \neq 0$ abbiamo un'ambiguità nel dire
quale teoria quantistica corrisponde alla teoria
classica di partenza. Qte ambiguità è data
dalla scelta di $\chi(\alpha)$ soddisfacenti le prop (*).