2) $W[U_1 U_2] = W[U_1] + W[U_2]$ $\leftarrow$ $\pi_3(S^3)$ è isomorfo a $(\mathbb{Z},+)$ come gruppo.

$$W[U] = -\frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3_x} tr\left[(U^{-1}dU)^3\right]$$

$$(U_1U_2)^{-1}d(U_1U_2) = U_2^{-1}(U_1^{-1}dU_1)U_2 + U_2^{-1}\cancel{U_1^{-1}}\cancel{U_1}\,dU_2$$

$$\equiv U_2^{-1}(A+B)U_2 \qquad \left.\begin{array}{l} A \equiv U_1^{-1}dU_1 \\ B \equiv dU_2\,U_2^{-1} \end{array}\right\} \text{1-forme}$$

$$W[U_1U_2] = -\frac{1}{24\pi^2}\int Tr\left[(A+B)(A+B)(A+B)\right] =$$

$$= -\frac{1}{24\pi^2}\int\left(Tr\,A^3 + Tr\,B^3 + 3Tr(A^2B) + 3Tr(AB^2)\right)$$

$$= W[U_1] + W[U_2] - \frac{1}{8\pi^2}\int Tr(-dA\,B + A\,dB)$$

$$A^2 = -dA \leftarrow dA = d(U_1^{-1}dU_1) = dU_1^{-1}\,dU_1 = -U_1^{-1}dU_1\,U_1^{-1}dU_1$$

$$d(U_1^{-1}U_1) = 0 = dU_1^{-1}\,U_1 + U_1^{-1}dU_1 \Rightarrow dU_1^{-1} = -U_1^{-1}dU_1\,U_1^{-1}$$

$$B^2 = dB$$

$$= W[U_1] + W[U_2] + \frac{1}{8\pi^2}\int_{S^3_x} d\,Tr(AB)$$

$\int_{S^3_x} d\,Tr(AB) = 0$ perché S^3_x non ha bordo //

• Consideriamo $U_0(x) = \mathbb{1}$ e $U_1(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} + i\,\frac{2x_i\,\sigma^i}{x^2+1}$

$U_0 \downarrow W=0$ $\qquad$ $U_1 \downarrow W=1$

$\Rightarrow$ U_1 non può essere deformato in maniera continua a U_0

Con la mappa U_1 possiamo trovare rappresentanti di tutte le altre classi: $W[U_1 \cdot U_1] = 2$ $\quad$ $W[U_1^\dagger] = -1$

$(0 = W[U_1^\dagger U_1] = W[U_1^\dagger] + W[U_1])$

• Ω_* è la somma diretta (unione disgiunta) di componenti disconnesse labellate dal winding number $w \in \mathbb{Z}$:

$$\Omega_* = \bigcup_{w=-\infty}^{+\infty} \Omega_*^{(w)} \qquad \pi^0(\Omega_*) = \mathbb{Z}$$

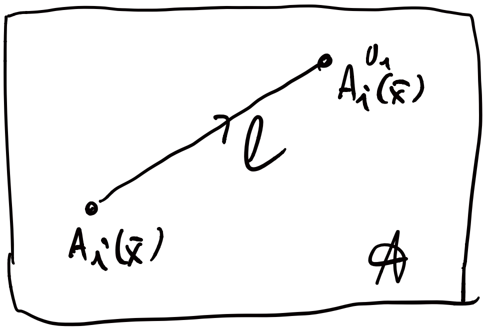
mappe nella classe labellata da w.

$\boxed{Q = \mathcal{A}/\Omega_*}$

Consideriamo una linea in $\mathcal{A}$ data da

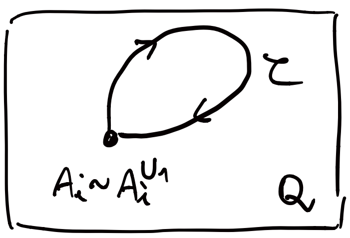
$$A_i(\bar{x},\tau) = A_i(\bar{x})(1-\tau) + A_i^{U_1}(\bar{x})\tau \qquad \tau \in [0,1] \qquad (*)$$

(U_1 è la mappa con $w=1$)



Nel quoziente, la linea ℓ in $\mathcal{A}$ diventa un loop, perché

$$A_i(\bar{x}) \sim A_i^{U_1}(\bar{x})$$

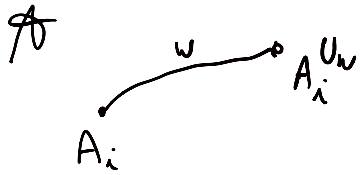


$\mathcal{C}$ è contraibile in Q?

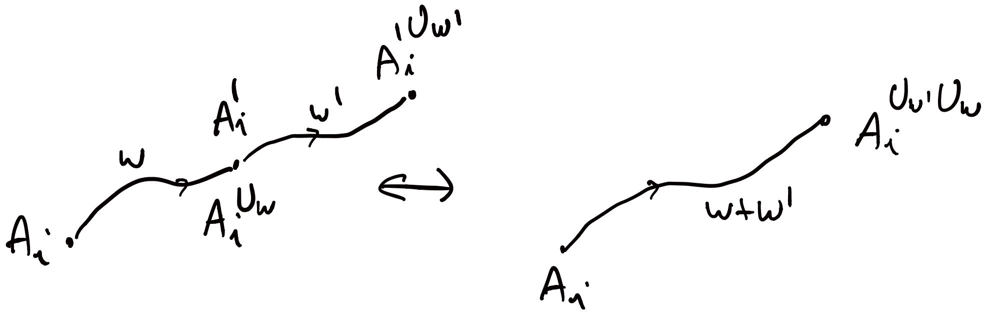
Lo sarebbe se ℓ fosse deformabile a un pezzo di orbita. Ma questo sarebbe possibile solo se $U_1(x)$ fosse deformabile in maniera continua alla mappa $\mathbb{1}$. Questo <u>non</u> è possibile perché U_1 e $\mathbb{1}$ appartengono a due classi di omotopia distinte

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{C}$ NON CONTRAIBILE $\Rightarrow$ $\pi^1(Q) \neq 0$

Possiamo ripetere lo stesso ragionamento sostituendo U_1 con U_w con $w \neq 0$ generico



Questi cammini sono labellati da $w \in \mathbb{Z}$ e cammini con w diverso non possono essere deformati l'uno nell'altro.

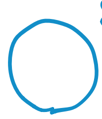


Abbiamo isomorfismo di gruppo con $\mathbb{Z}$:

$$\pi^1(Q) \cong \mathbb{Z}$$

[Finora $G = SU(2) \cong S^3$. Per un generico gruppo di Lie, esso ha un sottogruppo $SU(2)$ $\Rightarrow$ anche le mappe da S^3_x a G sono classificate da $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$.

Es. con π_1 : $S^1 \to$



S^1 pendolo

AB effect]

INTEGRALE DI CAMMINO e Θ - TERMINE

Q è uno sp. topologicam. non-triviale $\quad (\pi^1(Q) = \mathbb{Z})$

$$\int \mathcal{D}A \; e^{iS[A]} = \sum_w \chi(w) \int \mathcal{D}_w A \; e^{iS[A]} \qquad (*)$$

{cammini in $Q = \mathcal{A}/\mathcal{G}_\infty$}

CARATTERE di $\pi^1(Q) = \mathbb{Z} \Rightarrow \chi(w) = e^{iw\theta}$

I campi $A(\bar{x}, t)$ possono essere visti sia come funz. da $\mathbb{R}^4$, oppure come cammini (parametrizzati da t) in Q.

$\Rightarrow$ diverse teorie quantistiche associate alla stessa teoria classica, che sono parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$

- w che compare in $\chi(w)$ è il WINDING NUMBER
- $(*)$ può essere riscritta come $\int \mathcal{D}A \; e^{iS + iS_T}$.

  In questo caso il termine topologico è

$$S_T = \frac{\theta}{64\pi^2} \int d^4x \; \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\mu\nu} F^a_{\rho\sigma} = \theta \, c_2$$

che già sappiamo essere l'integrale di una derivata totale.

- $\int \mathcal{D}_w A \; e^{-S_E(A)}$ è approssimata semiclassicam. da una soluz. delle eq. del moto Euclidee, cioè da ISTANTONI.

[Nota: $d^4x \, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \sim dx^0 \, d^3x \, \epsilon^{0ijk} F_{0i} F_{jk} = d^4x_E \; F_{4i} F_{jk} \epsilon^{ijk} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e^{iS + iS_T} \rightsquigarrow e^{-S_E + iS_T}$]

• $e^{iS_T} = \chi = e^{i w \theta}$

$$w = -\frac{1}{24\pi^2}\int \mathrm{Tr}\left[(U^{-1}dU)^3\right] = \int d^3\bar{x}\,\left(K^0(A^U(\bar{x})) - K^0(A(\bar{x}))\right) =$$

$$= \int d^4x \;\partial_\mu K^\mu(A(x)) = -\frac{1}{32\pi^2}\int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\right)$$

(Nair pag. 365)

$$K^\mu = -\frac{1}{8\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\left(A_\nu\partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3}A_\nu A_\alpha A_\beta\right)$$

• Esempio di loop non contraibile

$$A_i(\bar{x}, x_4) = A_i(\bar{x})\,\frac{1}{1+e^{x_4}} + \frac{e^{x_4}}{1+e^{x_4}}\,A_i^{U_1}(\bar{x})$$

$\rightarrow A_i \qquad x_4 \rightarrow -\infty$

$\rightarrow A_i^{U_1} \qquad x_4 \rightarrow +\infty$

$w = 1$ per costruzione

Il contributo di tale cammino al P.I è dato da

$$e^{-S[A_i] + i\theta}$$

C'è un'infinità di cammini con $w = 1$ e tutti contribuiscono a $e^{i\theta}\int \mathcal{D}A_{w=1}\, e^{-S_E[A]}$.

Il contributo dominante è dato dai cammini che minimizzano l'azione Euclidea. Tali cammini avranno le seguenti proprietà:

1) sol. delle eq. del moto Euclidee. ($\delta S_E = 0$)
2) $S_E[A_{sol}] < \infty$

3) avranno un winding number finito.

4) $A_i(\bar{x}, x_4) \to 0$ per $x_4 \to -\infty$ e $A_i(\bar{x}, x_4) \to i U_w^{-1} \partial_i U_w$ per $x_4 \to +\infty$

(scelgo come pto base per i loop $A_i = 0$)(*)

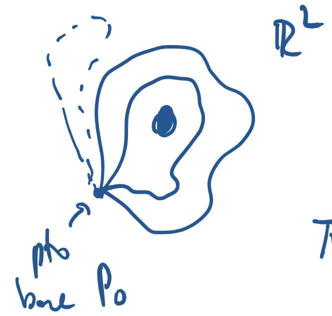
5) $A_0 \equiv A_4 = 0$ (nostra scelta di gauge fissa)

1,2,3

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad w(A) = n \in \mathbb{Z} \quad , \quad S_E(A) < \infty$$

Le config. che soddisfano queste prop. sono dette ISTANTONI !

(*)



$$\pi^1_{P_0}(Q) \cong \pi^1_{P_0'}(Q) \equiv \pi^1(Q)$$

ISTANTONI in teorie di gauge non-abeliane

Tra tutti i campi ($\to$ cammini) con winding number diverso da zero, consideriamo gli che risolvono le eq. del moto Euclidee, $D_\mu F^{\mu\nu} = 0$ $(\cdot)$

C'è un modo più semplice (rispetto a risolvere eq. diff. $(\cdot)$) per trovare config. che minimizzano S_E:

$$S_{YM} = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \, \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \qquad \text{(In sp. Euclideo)}$$

Ricordiamo che $\quad *F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$

Consideriamo

$$0 \leq \int d^4x \, \mathrm{tr} \left(F_{\mu\nu} \pm *F_{\mu\nu} \right)\left(F^{\mu\nu} \pm *F^{\mu\nu} \right) =$$

(vuol dire con segno + o con segno −)

$$= \underbrace{2\int d^4x \, \mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})}_{\geq 0} \pm \underbrace{2\int d^4x \, \mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu} *F^{\mu\nu})}_{\int d^4x \, \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 16\pi^2 W}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{YM} \geq \frac{8\pi^2}{g^2} |W| \qquad \text{(Bogomolnyi BOUND)}$$

I campi che minimizzano S_{YM} saranno quelli che saturano il bound, cioè gli t.c. $S_{YM} = \frac{8\pi^2}{g^2}|W|$

$$\Rightarrow \quad F_{\mu\nu} = \pm * F_{\mu\nu} \qquad \text{(ANTI)-SELF DUAL}$$

Qte conf. in particolare risolvono le eq. del moto

$$D^\mu F_{\mu\nu} = \pm D^\mu * F_{\mu\nu} \underset{\uparrow}{=} 0$$

Identicam. valida

per le Identità di Bianchi.