3) Una barretta cilindrica è uniformemente polarizzata in direzione assiale con $P = 10^5\ C/m^2$. Nei casi a) e b) considerati in figura 19, calcolare la densità di carica di polarizzazione distribuita sulle basi.

4) Come mostrato in figura 20, una sfera è uniformemente polarizzata con $P = 10^5\ C/m^2$. Descrivere la densità superficiale di carica.

Fig. 1.19

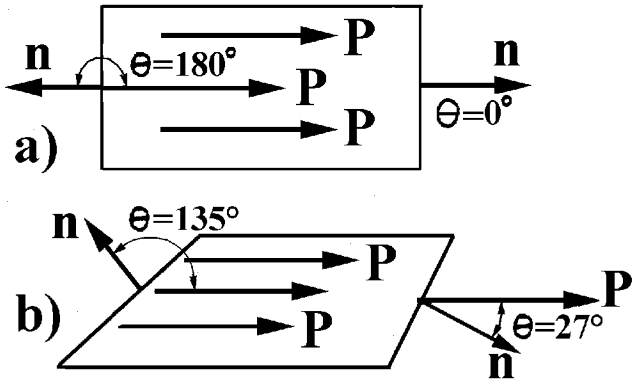
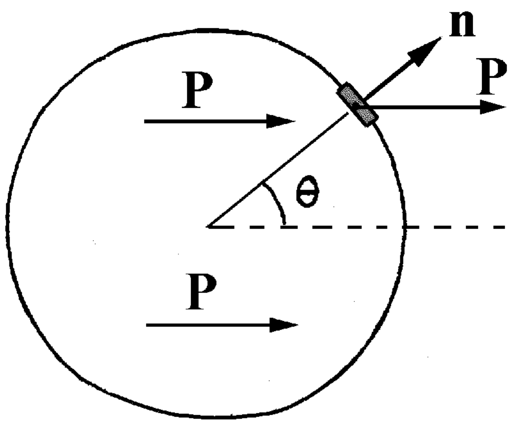


Fig. 1.20



1.9 Circolazione e rotore, teorema del rotore

Con riferimento alla figura 21, consideriamo una generica curva γ **chiusa e ferma**, scegliamo arbitrariamente un verso positivo di circolazione, avvolgiamo la curva con la mano destra disponendo le dita nel verso positivo di circolazione e conveniamo che la pagina positiva di una qualunque superficie orlata da γ sia indicata dal pollice. Poi consideriamo un generico campo vettoriale $\mathbf{C}(t, \mathbf{r})$ e definiamo la sua circolazione lungo la curva γ con l'integrale di linea

$$\oint_\gamma \mathbf{C}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}$$

dove $d\mathbf{s}$ è l' elemento di spostamento sulla curva. Il circoletto sul simbolo di integrale sta a ricordare che γ è una curva chiusa.

Fig. 1.21

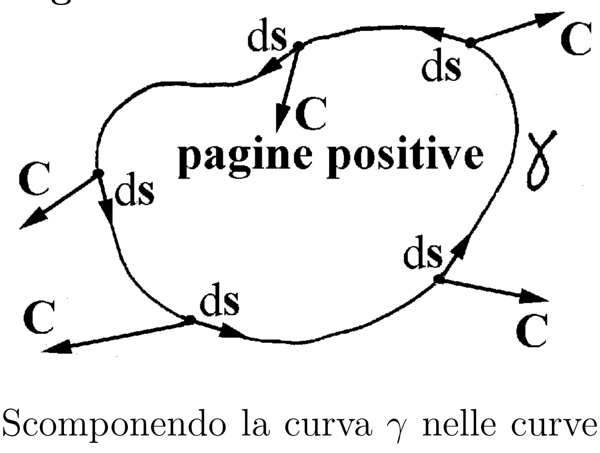
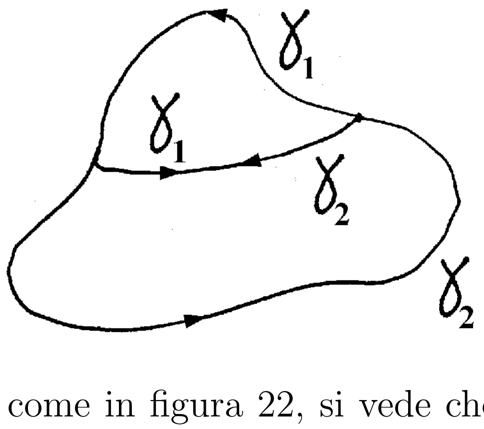


Fig. 1.22



Scomponendo la curva γ nelle curve γ_1 e γ_2, come in figura 22, si vede che la circolazione lungo γ è la somma delle circolazioni lungo γ_1 e γ_2. Infatti i contributi alle circolazioni sul lato comune alle due curve si elidono.

Ora, con riferimento alla figura 23, consideriamo un'areola infinitesima $d\mathcal{S}$ centrata in $\mathbf{r}$ ed orientata con versore normale $\mathbf{n}$. Indichiamo con $\delta\gamma$ il suo orlo e ci domandiamo se esista un campo vettoriale $rot\ \mathbf{C}(t,\mathbf{r})$ che abbia flusso attraverso l'areola $d\mathcal{S}$ uguale alla circolazione del campo $\mathbf{C}(t,\mathbf{r})$ lungo l'orlo $\delta\gamma$. Se il campo vettoriale $rot\ \mathbf{C}(t,\mathbf{r})$ esiste, la sua proiezione su $\mathbf{n}$ deve essere

$$\mathbf{n}\cdot rot\mathbf{C}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{d\mathcal{S}}\oint_{\delta\gamma}\mathbf{C}(t,\mathbf{r})\cdot d\mathbf{s} \qquad (M.9)$$

In particolare la componente z di $rot\mathbf{C}(t,\mathbf{r})$ deve essere il rapporto tra la circolazione di $\mathbf{C}(t,\mathbf{r})$ lungo l'orlo del quadratino infinitesimo mostrato in figura 24 e l'area del quadratino. Il quadratino è centrato in $\mathbf{r}$, ha normale nel verso dell'asse z e lati paralleli agli assi x ed y. Il contributo alla circolazione

Fig. 1.23

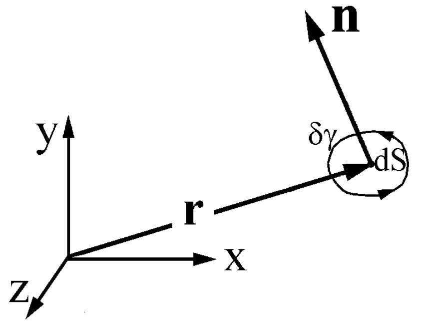
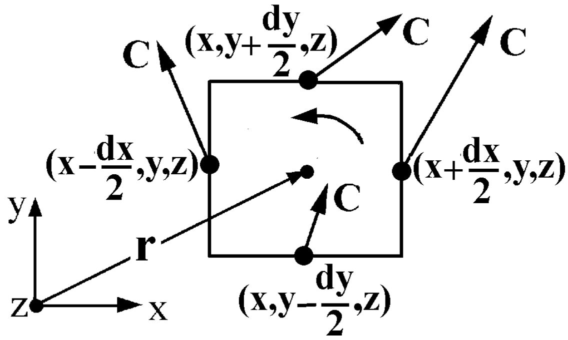


Fig. 1.24



di $\mathbf{C}(t,\mathbf{r})$ lungo i due lati del quadratino paralleli all'asse x risulta

$$C_x(t,x,y-\frac{dy}{2},z)dx - C_x(t,x,y+\frac{dy}{2},z)dx = -\frac{\partial C_x(t,\mathbf{r})}{\partial y}dxdy$$

e quello lungo i due lati paralleli all'asse y vale

$$C_y(t,x+\frac{dx}{2},y,z)dy - C_y(t,x-\frac{dx}{2},y,z)dy = \frac{\partial C_y(t,\mathbf{r})}{\partial x}dxdy$$

Tenendo conto che $dxdy = d\mathcal{S}$ è l'area del quadratino, vediamo che

$$[rot\mathbf{C}(t,\mathbf{r})]_z = \frac{\partial C_y(t,\mathbf{r})}{\partial x} - \frac{\partial C_x(t,\mathbf{r})}{\partial y}$$

Questo risultato ed i risultati analoghi che si ottengono per quadratini orientati con normali nei versi degli assi x ed y sono riassunti dalla regola di calcolo

$$rot\ \mathbf{C}(t,\mathbf{r}) = \nabla\times\mathbf{C}(t,\mathbf{r})$$

Insomma il **rotore** del campo $\mathbf{C}(t,\mathbf{r})$ esiste davvero perché può essere calcolato con l'operazione $\nabla\times\mathbf{C}(t,\mathbf{r})$. Anche in questo caso la notazione $\nabla\times\mathbf{C}$ ha soppiantato la notazione $rot\ \mathbf{C}$ e viene usata senza intendere che il calcolo debba essere fatto a partire dalle componenti cartesiane; negli esercizi e nel seguito del corso vedremo che, molto spesso, conviene calcolare il rotore con approccio geometrico partendo dalla definizione M.9).

Armati dell'equazione $M.9$), torniamo a considerare la curva γ mostrata in figura 21, scegliamo una qualunque superficie orlata da γ e notiamo che la circolazione di $\mathbf{C}(t,\mathbf{r})$ lungo γ è la somma delle circolazioni lungo gli orli di tutte le areole che "mattonellano" la superficie scelta, ovvero

$$\oint_\gamma \mathbf{C}(t,\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \int_\mathcal{S} d\mathcal{S}\ \mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{C}(t,\mathbf{r})] \tag{$M.10$}$$

Questa equazione è il **teorema del rotore**, noto anche come **teorema di Stokes**. In parole: **la circolazione di un generico campo vettoriale lungo una curva γ, ferma e chiusa, piccola o grande che sia, è uguale al flusso del rotore del campo attraverso una qualunque superficie S orlata dalla curva.** Insistiamo nel dire che $\mathcal{S}$ è una **qualunque** superficie orlata da γ. Ad esempio si pensi ad una retina acchiappafarfalle: la circolazione di un campo vettoriale lungo l'anello che la orla è uguale alla somma delle circolazioni lungo le maglie della retina, e ciò vale comunque questa sia disposta rispetto all'anello fermo.

Infine notiamo che il rotore di un qualunque campo vettoriale ha lo stesso flusso attraverso superfici diverse orlate da una stessa curva, quindi il suo flusso uscente da una qualunque superficie chiusa è nullo. Ciò comporta che **la divergenza del rotore di un qualunque campo vettoriale è nulla.** Lo si dimostra anche con gli approcci suggeriti nell'esercizio 2. Ed è anche facile dimostrare che **il rotore del gradiente di un qualunque campo scalare è nullo**. Lasciamo la dimostrazione all'esercizio 3).

ESERCIZI

1) Pensare a campi radiali di intensità α/r^n e considerare la loro circolazione lungo l'orlo di un quadratino infinitesimo. Dapprima con approccio geometrico, poi con calcolo diretto, dimostrare che, dovunque sia posto e comunque sia orientato il quadratino, la circolazione è nulla.

2) Dimostrare che la divergenza del rotore di un qualunque campo vettoriale $\mathbf{C}(t,\mathbf{r})$ è sempre ed ovunque nulla. Procedere in due modi: a) con calcolo diretto e tenendo conto che le derivate seconde miste non dipendono dall'ordine di derivazione, b) scegliere una qualunque curva chiusa γ sulla superficie chiusa S, indicare con S_1 ed S_2 le due superfici che compongono S, entrambe orlate dalla curva γ, ed osservare che

$$\int_\mathcal{V} \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{C}]\ d\mathcal{V} = \int_{S_1} \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{C}\ dS_1 + \int_{S_2} \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{C}\ dS_2 = \oint_\gamma \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} - \oint_\gamma \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s}$$

3) Dimostrare che il rotore del gradiente di un qualunque campo scalare $f(t,\mathbf{r})$ è nullo. Anche in questo caso procedere sia con calcolo diretto, sia notando che

$$\int_\mathcal{S} \mathbf{n} \cdot \nabla \times [\nabla f(t,\mathbf{r})] d\mathcal{S} = \oint_\gamma [\nabla f(t,\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{s} = 0$$

4) Con approccio geometrico verificare che il rotore del campo $\mathbf{a}/r$, con $\mathbf{a}$ vettore fisso, è in accordo con l'equazione $M.8$).