ESERCIZI DI GEOMETRIA, FOGLIO 7

Trieste, 27 novembre 2020

1. Per la seguente matrice reale A
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
trovare matrici quadrate invertibili S e T tali che SAT sia una matrice a blocchi della forma canonica $\begin{pmatrix} E_r & | & 0 \\ --- & - & --- \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

2. a) Calcolare, se possibile, l'inversa della seguente matrice su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{Z}_7$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$
b) Determinare i valori di $x \in \mathbb{R}$ per cui la matrice reale
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$
è invertibilie, e per tali valori calcolare l'inversa.

3. Sia $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 2 nella indeterminata t. Considerare i polinomi $p_1(t) = t^2 - 2t$, $p_2(t) = 1 + 2t$, $p_3(t) = 2 - t^2$, $q_1(t) = -1 + t$, $q_2(t) = -1 + t - t^2$, $q_3(t) = 2t + 2t^2$. Dimostrare che $\mathcal{A} = (p_1, p_2, p_3)$ e $\mathcal{B} = (q_1, q_2, q_3)$ sono due basi di V e determinare la matrice di passaggio da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

4. Siano dati i seguenti vettori in $\mathbb{Q}^3$: $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (0, 0, 2)$, $w_1 = (3, 1, 0)$. $w_2 = (-1, 0, 2)$, $w_3 = (0, 2, 0)$. Dimostrare che esiste un unico endomorfismo T di $\mathbb{Q}^3$ tale che $T(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2, 3$, e trovare le matrici associate a T rispetto alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ e rispetto alla base canonica.

5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alle basi canoniche dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare la matrice che rappresenta f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ formata da $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, e $\mathcal{B}'$ da $(1, 0), (1, 1)$.