Estensione di $\mathcal{F}$ a $L^2(\mathbb{R})$.

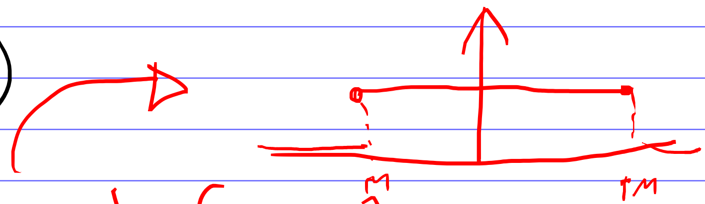
Per funzioni in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ $\ni f$:

- $\hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$
- $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\, \|f\|_2$ PARSEVAL

Visto che il problema che impedisce a una generica $f \in L^2$ di essere L^1 è ∞

possiamo considerare:

f_n approssimazione di f che sta in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$



$$f_n(t) := \theta(n - |t|)\, f(t)$$

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad \text{in norma } L^2(R)$$

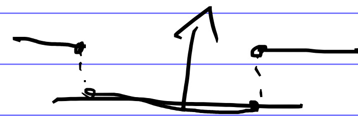
ovvero: $\cancel{\|f_n\|_2 \longrightarrow \|f\|_2}$

$$\left[\ \|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\ \right]$$

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f - f_n|^2 \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\underbrace{1 - \theta(n - |t|)}_{(\theta(|t|-n))^2 = \theta(|t|-n)}\big)^2 |f|^2 \, dt$$

$$\|f_n - f\|_2^2 = \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{-n} + \int_{+n}^{+\infty}\right) dt}_{\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \theta(|t|-n)} |f|^2$$



Dato che $f \in L^2$ e che quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, |f|^2$ converge, la coda dell'integrale tende a 0: $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{-n} + \int_{+n}^{+\infty} dt\, |f|^2 = 0$

$$\Longrightarrow \quad \|f_n - f\|_2^2 \longrightarrow 0$$

Siccome $f_n \in L^1 \cap L^2$ converge, vale il criterio di Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N \text{ t.c. } \forall n, m \geq N \quad \underline{\underline{\| f_n - f_m \|_2}} < \varepsilon$$

PARSEVAL

$\Rightarrow$ anche la successione delle trasformate di Fourier è di Cauchy: $\| \hat{f}_n - \hat{f}_m \|_2 < \sqrt{2\pi}\, \varepsilon$

D'altra parte $L^2(\mathbb{R})$ con la sua norma è uno spazio completo (di Banach)

$\Rightarrow$ ogni successione di Cauchy ammette un limite

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \hat{f}_n =: \underbrace{\hat{f}} \in L^2(\mathbb{R})$$

questo limite definisce la trasformata della funzione $f \in L^2$.

Concretamente: $\quad f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) := \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{+n} dt\, f(t)\, e^{i\omega t}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(\omega)$$

$$\boxed{\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \quad \text{parte principale a } t=\infty}$$

Anche se $\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} f(t)$ non necessariamente converge per $f \in L^2$, questo limite simmetrico sì.

Dato che: $\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n = \hat{f}$

vale anche che $\|\hat{f}_n\|_2 \longrightarrow \|\hat{f}\|_2$

$\|$

$\sqrt{2\pi}\,\|f_n\|_2 \longrightarrow \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$

$\Longrightarrow$ PARSEVAL vale anche in $L^2(\mathbb{R})$

$f \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$.

Con la trasformata in L^2 possiamo rendere precisa la formula dell'anti-trasformata:

<u>Teorema</u>: $\mathcal{F}^{-1}[g] = \frac{1}{2\pi} R \circ \mathcal{F}[g]$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}[g^*]\right)^*$$

$$R \circ \mathcal{F}[g] = \int dt\, g(t)\, e^{i(-\omega)t} = \int dt\, g(t)\, e^{-i\omega t}$$

$$\left(\mathcal{F}[g^*]\right)^* = \left(\int dt\, g^*(t) e^{i\omega t}\right)^* = \int dt\, g(t)\, e^{-i\omega t}$$

Dim: $$f := \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}[g^*]\right)^*$$

Dobbiamo mostrare che $\mathcal{F}[f] = g$

ovvero che: $$\|\mathcal{F}[f] - g\|_2 = 0$$

Calcoliamo: $$\|\mathcal{F}[f] - g\|_2^2$$

$$= \left(\mathcal{F}[f]-g, \mathcal{F}[f]-g\right) = \underbrace{\|\mathcal{F}[f]\|_2^2}_{2\pi\|f\|_2^2} + \|g\|_2^2$$

$$-\left(\mathcal{F}[f], g\right) - \left(g, \mathcal{F}[f]\right)$$

$\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$

$\|v\| = 0 \iff v = 0$

$$= 2\pi \underbrace{\|f\|_2^2}_{} + \|g\|_2^2 - (\mathcal{F}[f], g) - (\mathcal{F}[f], g)^*$$

$$f = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[g^*])^*$$

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} 2\pi \|g\|_2^2$$

$$= \cancel{2\pi} \frac{1}{\cancel{(2\pi)^2}} \cancel{2\pi} \|g\|_2^2 + \|g\|_2^2 - (\mathcal{F}[f], g) - (\mathcal{F}[f], g)^*$$

$$= 2\|g\|_2^2 - (\mathcal{F}[f], g) - (\mathcal{F}[f], g)^*$$

dobbiamo fare un calcolo

$$(\mathcal{F}[f], g) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f_m(y) e^{iyt} \right)^*}_{(\mathcal{F}[f])^*(t)} g_n(t)$$

[introduciamo g_n e f_m approssimazioni di f e g in $L^1 \cap L^2$]

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f_m^*(y) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-iyt} g_n(t)}_{(\mathcal{F}[g_n^*])^*(y)}$$

→ Fubini-Tonelli

$$\left[(h, K) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, h^*(t) K(t) \longrightarrow (h, k) = (k, h)^* \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \left(f_m, \mathcal{F}[g_n^*]^* \right)$$

- $f_m \xrightarrow[m\to\infty]{} f$ in norma L^2
- $\mathcal{F}[g_n^*] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{F}[g^*]$ in norma L^2 (per definizione di $\mathcal{F}$)
- $(\cdot,\cdot)$ è continuo

$$f = \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}[g^*]\right)^*$$

$$= \left(f, \left(\mathcal{F}[g^*]\right)^* \right) = \frac{1}{2\pi} \left\| \mathcal{F}[g^*] \right\|_2^2$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cancel{2\pi} \, \| g^* \|_2^2 = \| g \|_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\mathcal{F}[f], g \right) = \| g \|_2^2}$$ calcolo appena fatto

$$\| g \|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, |g(t)|^2$$

Ma: $|z| = |z^*|$

Quindi:

$$\| \mathcal{F}[f] - g \|_2^2 = 2 \| g \|_2^2 - \left(\mathcal{F}[f], g \right) - \left(\mathcal{F}[f], g \right)^*$$

$$= 2 \| g \|_2^2 - \| g \|_2^2 - \| g \|_2^2 = 0$$

Quindi in $L^2(R)$ abbiamo:

$$\begin{cases} \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, f(t) \, e^{i\omega t} \\ f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \, \hat{f}(\omega) \, e^{-i\omega t} \quad (*) \end{cases}$$

ci va $\mathcal{D}$ all'∞ per essere precisi

Possiamo quindi assegnare un'interpretazione simile a quella che abbiamo visto per la serie:

f definita su $[-T, T]$

$$f(t) = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n \, e^{-i\omega_n t}}, \quad \left[\omega_n = \frac{\pi n}{T}\right]$$

$$(*): \quad \mathcal{F}^{-1}[g] = \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}[g^*]\right)^*$$

$$g = \hat{f} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f$$

$$\left[f(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \hat{f}^*(\omega) e^{i\omega t}\right)^* \right]$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \hat{f}(\omega) \, e^{-i\omega t}$$

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} dt \, f(t) e^{i\omega_n t}$$

Sia $\hat{f}_n$ che $\hat{f}(\omega)$ sono coefficienti nella rappresentazione di $f(t)$ come somma (o integrale nel caso di $\mathbb{R}$) di "armoniche"

$$\underbrace{e^{i\omega_n t}}_{\substack{\text{set discreto di}\\ \text{frequenze per}\\ \text{la serie}}} \quad / \quad \underbrace{e^{i\omega t}}_{\substack{\text{set continuo}\\ \text{per la trasformata}}}$$

Il coefficiente di una certa funzione

è dato (formalmente nel caso di R) dal prodotto scalare della funzione $e^{i\omega_n t}$ / $e^{i\omega t}$ con la funzione che vogliamo espandere:

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt\, f(t)\, e^{i\omega_n t} = \frac{1}{2T}\left(e^{-i\omega_n t}, f\right)$$

$T \to \infty$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)\, e^{i\omega t} = \text{``}\left(e^{-i\omega t}, f\right)\text{''}$$

In entrambi i casi vale Parseval:

- $$\int_{-T}^{+T} dt\, |f(t)|^2 = 2T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2$$

  [basta sostituire $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_n t}\hat{f}_n$ e usare ortogonalità di $(e^{i\omega_n t}, e^{i\omega_m t})$ per $n \neq m$.]

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, |f(t)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, |\hat{f}(\omega)|^2$$

La norma L^2 della funzione = "somma" del modulo quadro dei coefficienti.

Possiamo guardare quali frequenze sono più importanti nel ricostruire la funzione f:

Serie:

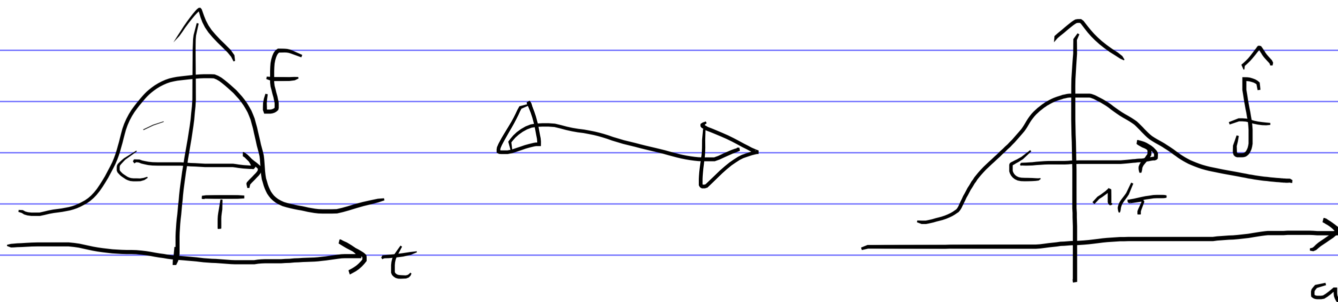
$$\frac{|\hat{f}_n|^2}{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} dt\,|f(t)|^2} = \frac{|\hat{f}_n|^2}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2} \rightarrow \text{contributo delle frequenze } \omega_n$$

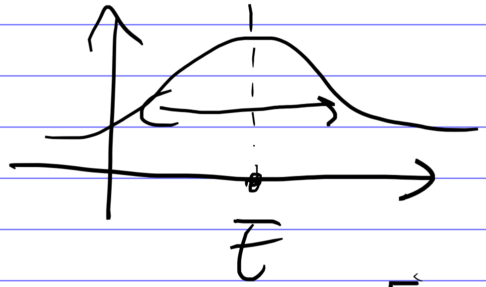
successione con somma normalizzata a 1

trasformata : $\dfrac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\|\hat{f}\|_2^2} \rightsquigarrow$ contributo della freq. ω

Entrambi i casi: distribuzioni positive normalizzate a 1.

Ora vedremo come rendere rigorosa l'idea che:



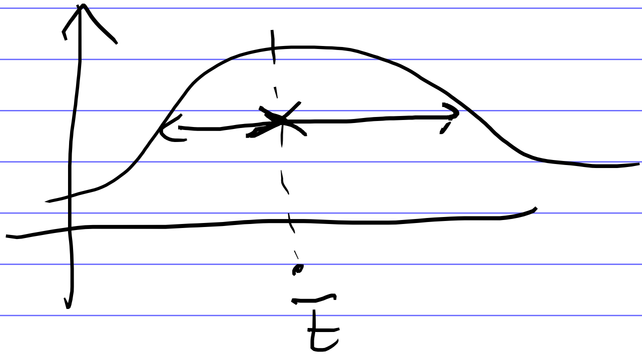


Definiamo il **Baricentro**:

temporale: $$\left[\ \bar{t} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, t\, |f(t)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, |f(t)|^2}\ \right]$$

$$\left(p(t) = \frac{|f(t)|^2}{\|f\|_2^2} \qquad \int dt\, p(t) = 1 \right)$$

spettrale o delle frequenze: $$\left[\ \bar{\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \omega\, |\hat{f}(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, |\hat{f}(\omega)|^2}\ \right]$$



Larghezza:

temporale $\quad (\Delta t)^2 = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} dt\,(t-\bar{t})^2 |f(t)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} dt\,|f(t)|^2}$

frequenze $\quad (\Delta \omega)^2 = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,(\omega-\bar{\omega})^2 |\hat{f}(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,|\hat{f}(\omega)|^2}$

Notiamo che ci serve assumere che
$t f(t) \in L^2$ e anche $\omega \hat{f}(\omega) \in L^2$

$\longrightarrow$ esiste $\frac{d\hat{f}}{d\omega}$, $\frac{df}{dt}$ (non necessariamente continue).

$$0 \leq \left\| \frac{\omega - \bar{\omega}}{2(\Delta\omega)^2} \hat{f}(\omega) + \frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega} \right\|_2^2$$

ASSUMIAMO $\bar{t} = 0$ PER SEMPLICITÀ

$$= \left\| \frac{\omega - \bar{\omega}}{2(\Delta\omega)^2} \hat{f}(\omega) \right\|_2^2 + \left\| \frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega} \right\|_2^2$$

$\|f\| = \int |f(t)|^2 dt$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{\omega - \bar{\omega}}{2(\Delta\omega)^2} \Big[\underbrace{\hat{f}^*(\omega) \frac{d\hat{f}(\omega)}{d\omega} + \hat{f}(\omega) \frac{d\hat{f}^*(\omega)}{d\omega}}_{d/d\omega\left(\hat{f}^*(\omega)\hat{f}(\omega)\right)} \Big]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\omega - \overline{\omega})^2}{4(\Delta\omega)^4} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega + \| \mathcal{F}[itf(t)] \|_2^2$$

$$\mathcal{F}[itf] = \frac{d\hat{f}}{d\omega}$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{\omega - \overline{\omega}}{2(\Delta\omega)^2} \frac{d}{d\omega} |\hat{f}(\omega)|^2$$

DEF. DI $(\Delta\omega)^2$

PARSEVAL

$$= \frac{1}{4(\Delta\omega)^4} (\Delta\omega)^2 \|\hat{f}\|_2^2 + 2\pi \| itf(t) \|_2^2$$

INT. PER PARTI

$$- \frac{1}{2(\Delta\omega)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, |\hat{f}(\omega)|^2$$

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, t^2 |f(t)|^2$$

$$= 2\pi (\Delta t)^2 \|f\|_2^2$$

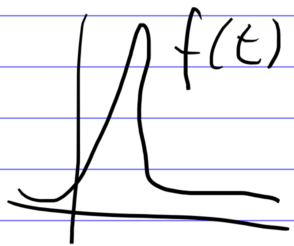
$$= \frac{1}{4} \frac{1}{(\Delta\omega)^2} 2\pi \|f\|_2^2 + 2\pi (\Delta t)^2 \|f\|_2^2$$

$$- \frac{1}{2(\Delta\omega)^2} 2\pi \|f\|_2^2$$

$$= 2\pi \|f\|_2^2 \left((\Delta t)^2 - \frac{1}{4} \frac{1}{(\Delta\omega)^2} \right) .$$

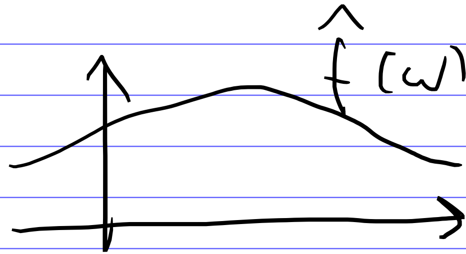
$$\Longrightarrow \boxed{(\Delta t)(\Delta\omega) \geq \frac{1}{2}}$$

PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE



con interpretazione vista prima vuol dire che se "conosciamo bene" il valore di t

$\Longrightarrow$



NON "conosciamo bene" il valore di ω

e viceversa.