Geometria 1 per Matematica e IADA

Foglio di esercizi 8

27 novembre 2020

1) Scomporre in cicli disgiunti e fattorizzare come prodotto di trasposizioni la permutazione
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \Sigma_8.$$
Calcolare σ^{-1}, il numero di inversioni $\iota(\sigma)$ e $\mathrm{sgn}(\sigma)$. Calcolare σ^2 e $(6\ 8) \cdot \sigma \cdot (1\ 4\ 7)$.

2) Scomporre in cicli disgiunti e quindi fattorizzare in trasposizioni la permutazione $(1\ 3\ 5) \cdot (3\ 2\ 4)^{-1} \cdot (1\ 2\ 3\ 5) \in \Sigma_5$. Scriverla in forma di tabella e calcolarne il segno.

3) Dimostrare che se $\sigma \in \Sigma_n$ è un k-ciclo, allora $\sigma^k = \mathrm{id}$.

4) Si considerino le matrici seguenti:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2i & 1+3i \\ -1 & -1+i \end{pmatrix}.$$
Calcolare $\det A$ e $\det B$ e verificare che: $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ e $\det(B^{-1}) = (\det B)^{-1}$.

5) Consideriamo
$$A(t) = \begin{pmatrix} t & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & t \end{pmatrix},$$
per $t \in \mathbb{C}$. Calcolare $\det A(t)$ e $\mathrm{rg}\, A(t)$, concludendo che $\mathrm{rg}\, A(t) < 3 \Leftrightarrow \det A(t) = 0$.