Punti stazionari di f

$f'(x_0) = 0$

↳ minimi / massimi locali
flesso orizzontale

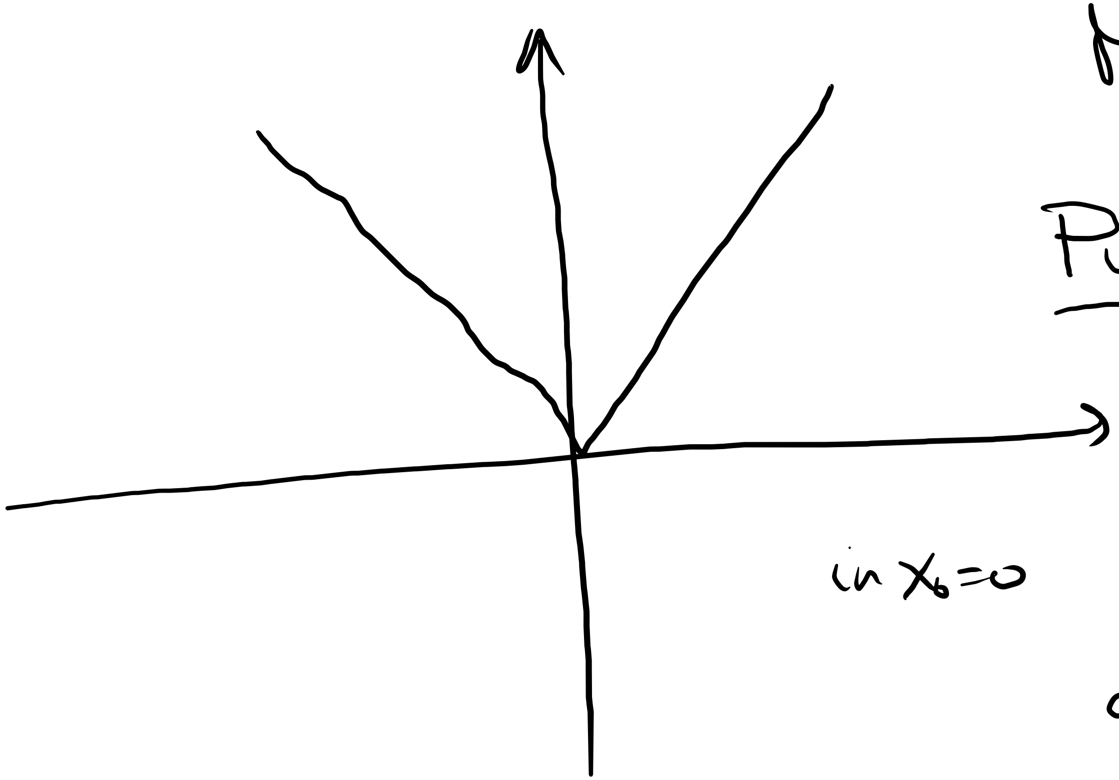
Teorema di Fermat

Se f ha un minimo/massimo locale in x_0 ed è derivabile in x_0
allora $f'(x_0) = 0$

Attenzione

$f(x)=|x|$ ho un minimo assoluto in $x_0=0$

Ma in $x_0=0$ non è derivabile

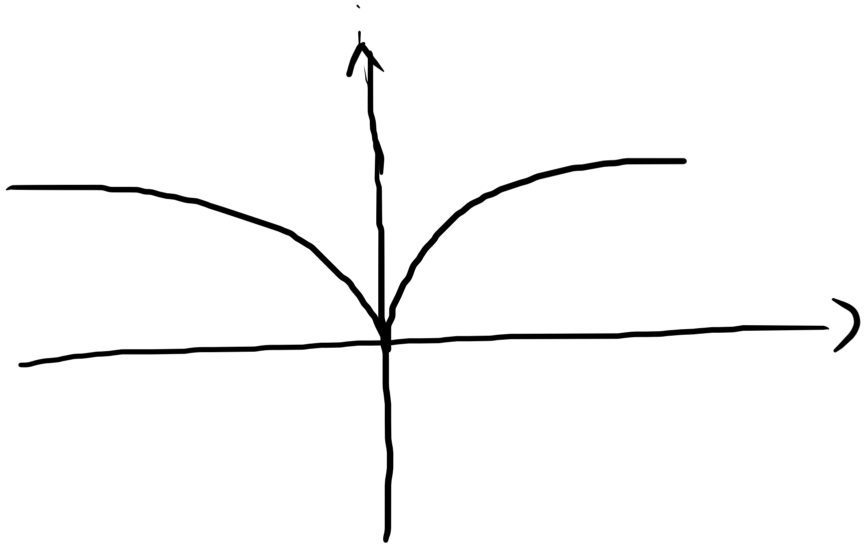


Punto angoloso $\boxed{x_0=0}$ per $|x|$

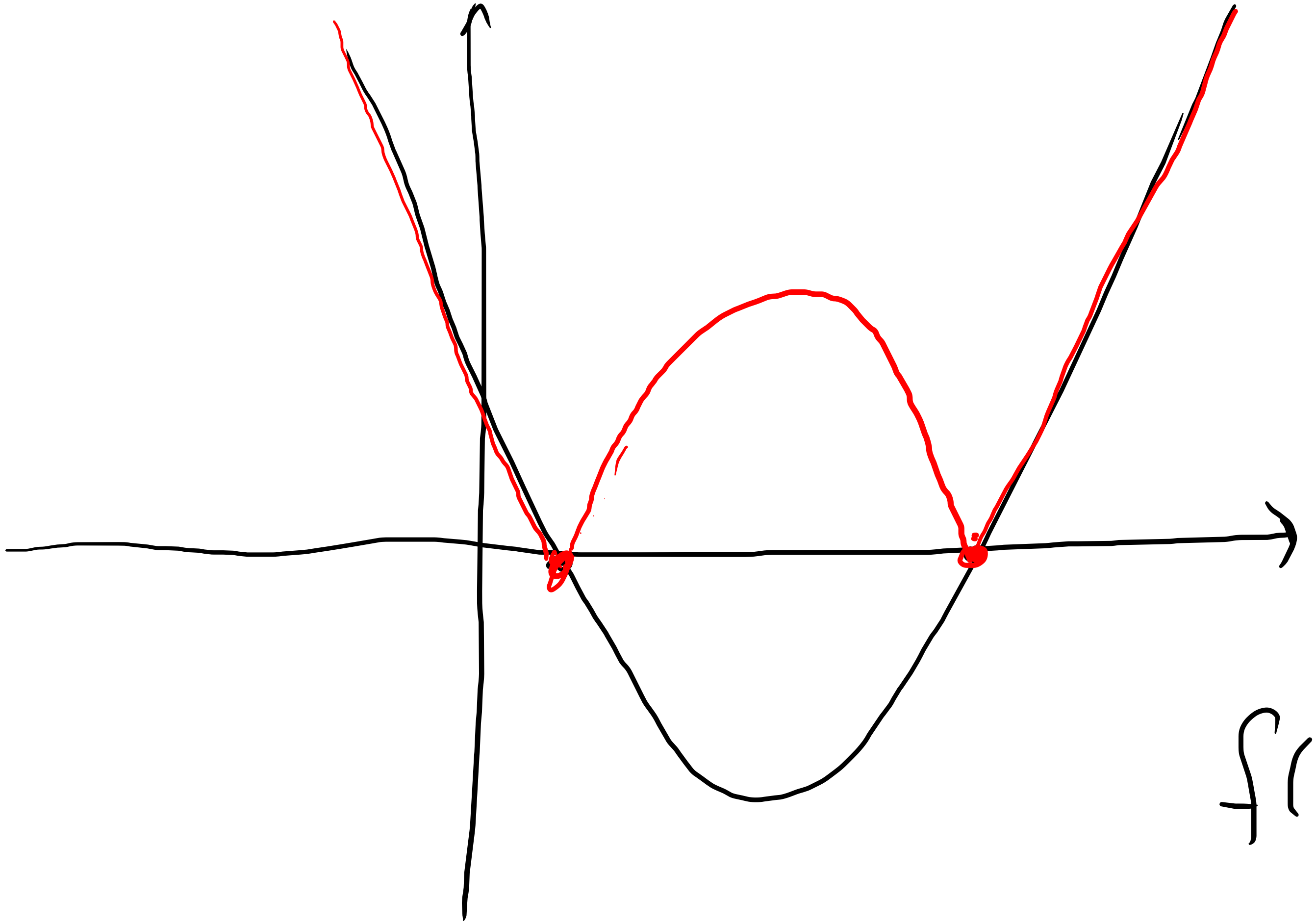
in quanto il limite del rapporto incrementale destro in $x_0=0$ esiste ed è finito ma diverso dal limite del rapporto incrementale sinistro in $x_0=0$

x_0 è un punto cuspidale o cuspide per f se il limite (destro o sinistro o entrambi) del rapporto incrementale di f in x_0 esiste ma non è finito

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$



$x_0 = 0$ cuspide



$y = Ax^2 + Bx + C$

$$\underbrace{B^2 - 4AC > 0}_{A > 0}$$

$f(x) = |Ax^2 + Bx + C|$

Teorema di Rolle

Sia f continua in $[a,b]$ (intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$)

$$\parallel$$

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

e f derivabile in $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \quad a < x < b\}$.

Se $f(a) = f(b)$, allora esiste $x_0 \in]a,b[$ tale che

$$f'(x_0) = 0,$$

ossia esiste un punto stazionario per f in $]a,b[$.

Dim Anzitutto, sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di Weierstrass
(f continua in $[a,b]$.)

$$\Downarrow$$

$\exists$ x_m, x_M in $[a,b]$ rispettivamente punti di minimo e di massimo per f.

Se x_m o $x_M \in \,]a,b[$, allora per il Teorema di Fermat f' si annulla in x_m o x_M.

Se invece x_m e x_M $\in \{a,b\} = [a,b] \setminus]a,b[$

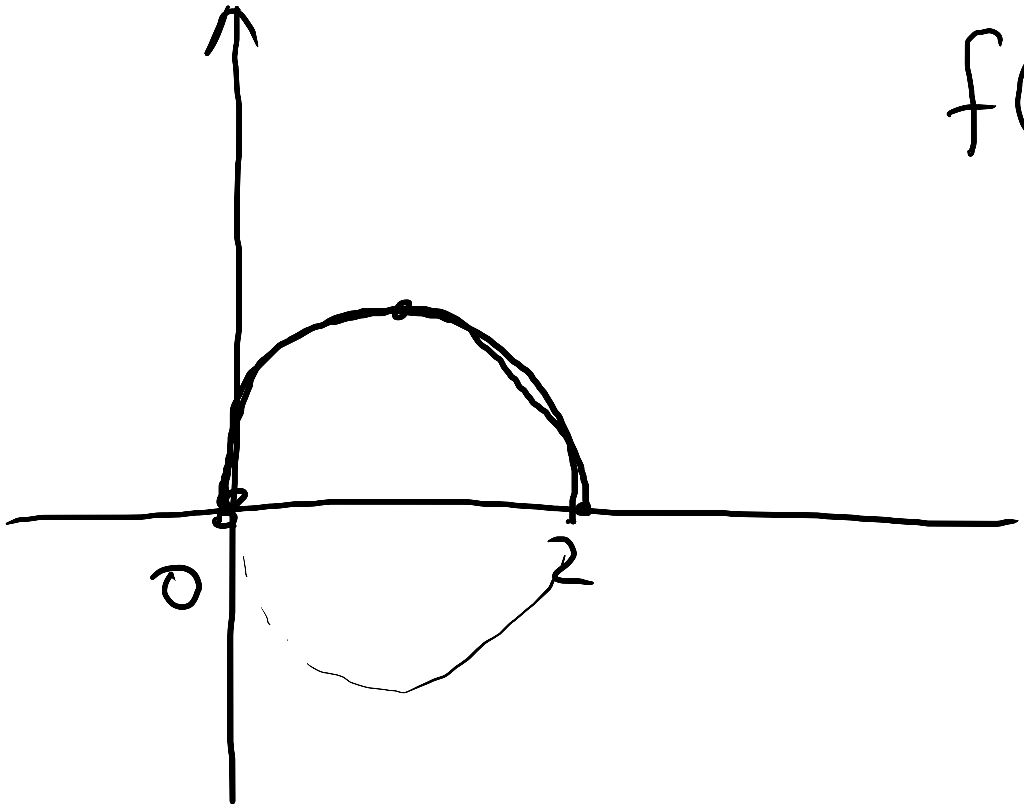
allora, per l'ipotesi che $\underset{\substack{\parallel \\ m/M}}{f(a)} = f(b) = m/M$

$\Rightarrow$ f è costante sull'intervallo chiuso $[a,b]$

e di conseguenza $f' \equiv 0$ in $]a,b[$.

$\square$

Oss



$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

Dom f = $[0, 2]$

continua in $[0, 2]$

derivabile in $(0,2) =]0,2[$

in quanto 0 e 2 sono cuspidi

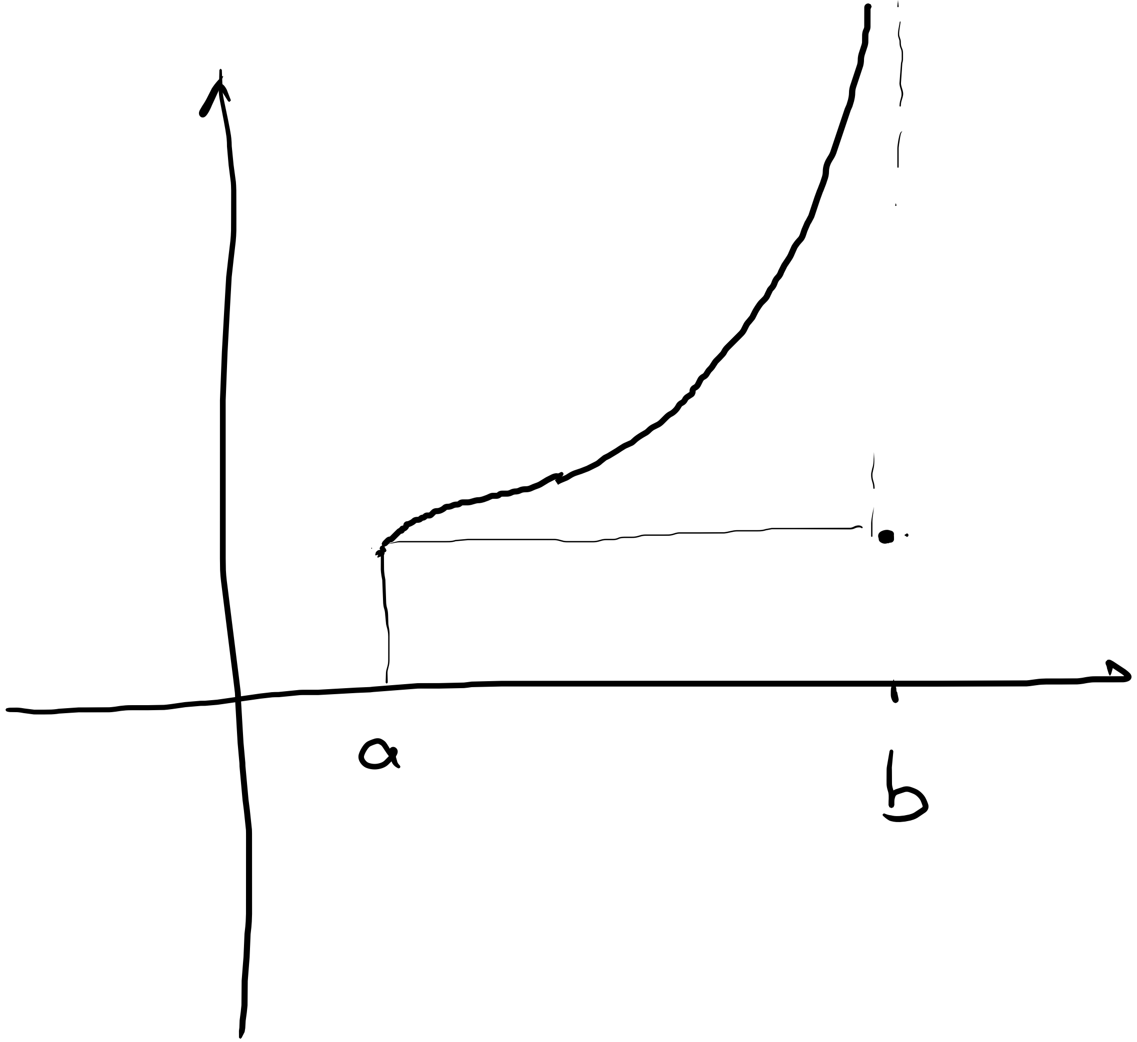
Se invece supponiamo

f continua in $[a, b)$ $f(a) = f(b)$

derivabile in $]a, b[$

L'ENUNCIATO del TEOREMA di Rolle NON È VERO.

Es



NESSUN PUNTO STAZIONARIO

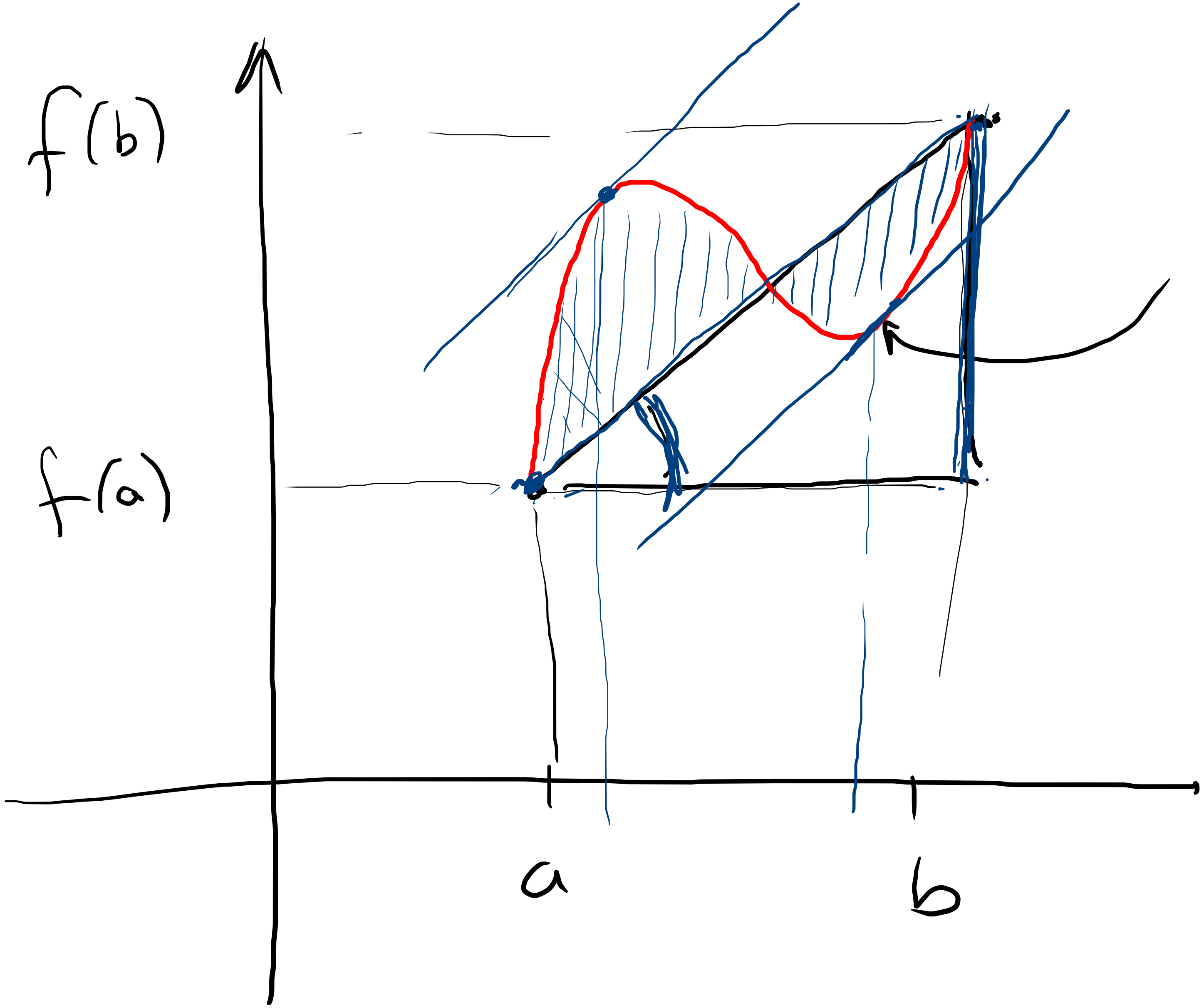
Teorema di Lagrange

Sia f continua in $[a,b]$

f derivabile in $]a,b[$.

Allora esiste $x_0 \in]a,b[$ tale

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$



$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

L'equazione della retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ è

$$y = \overset{m}{\overset{\parallel}{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}}\, x + q$$

con q tale che $f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\, a + q$

$$q = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a$$

$$\boxed{y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x + f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a}$$

$$\boxed{y = \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{} x + f(a) - \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a}_{}}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \underline{\underline{b}} + f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a =$$

$$= \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}} \left[\cancel{b-a} \right] + f(a) = f(b) - f(a) + f(a) = \underline{\underline{f(b)}}$$

Considero

$$g(x) =: \underline{\underline{f(x)}} - y = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x - f(a) +$$

$$+ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a$$

g è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$ in quanto differenza di f e di y, entrambe continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$.

Inoltre $\underline{g(a) = 0 = g(b)}$.

Applico il Teorema di Rolle a g, $\exists\, x_0 \in]a,b[$ tale che $g'(x_0)=0$.

$$g = f - y$$

$$g(a) = f(a) - \overset{f(a)}{\overset{\shortparallel}{y(a)}} = 0$$

$$g(b) = f(b) - \overset{f(b)}{\overset{\shortparallel}{y(b)}} = 0$$

Ma $$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x + \underbrace{f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a}$$

quindi $$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ossia $$0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

cioè $$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\square$.

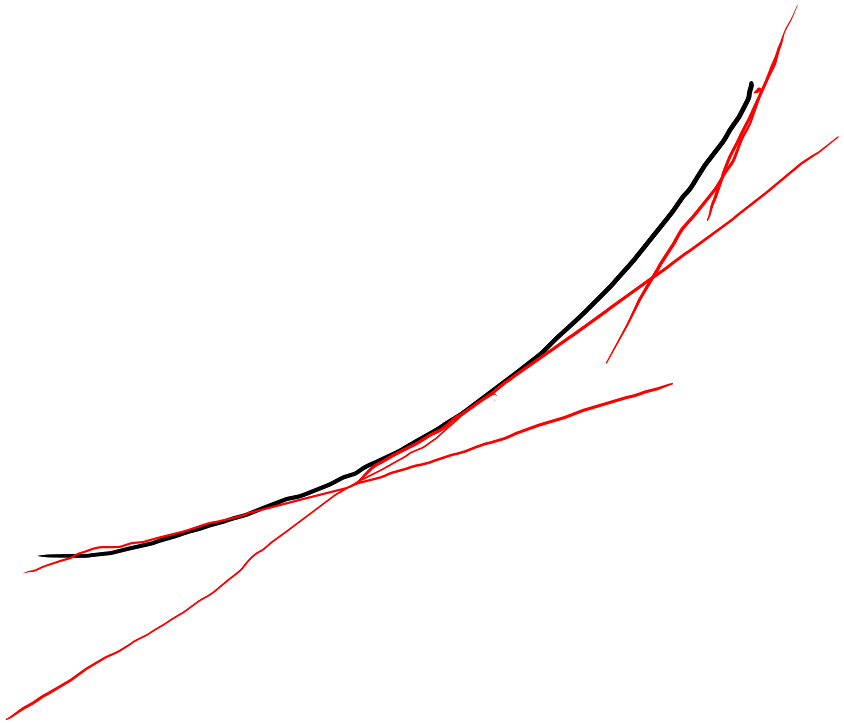
Ci sono diverse conseguenze del Teorema di Lagrange.

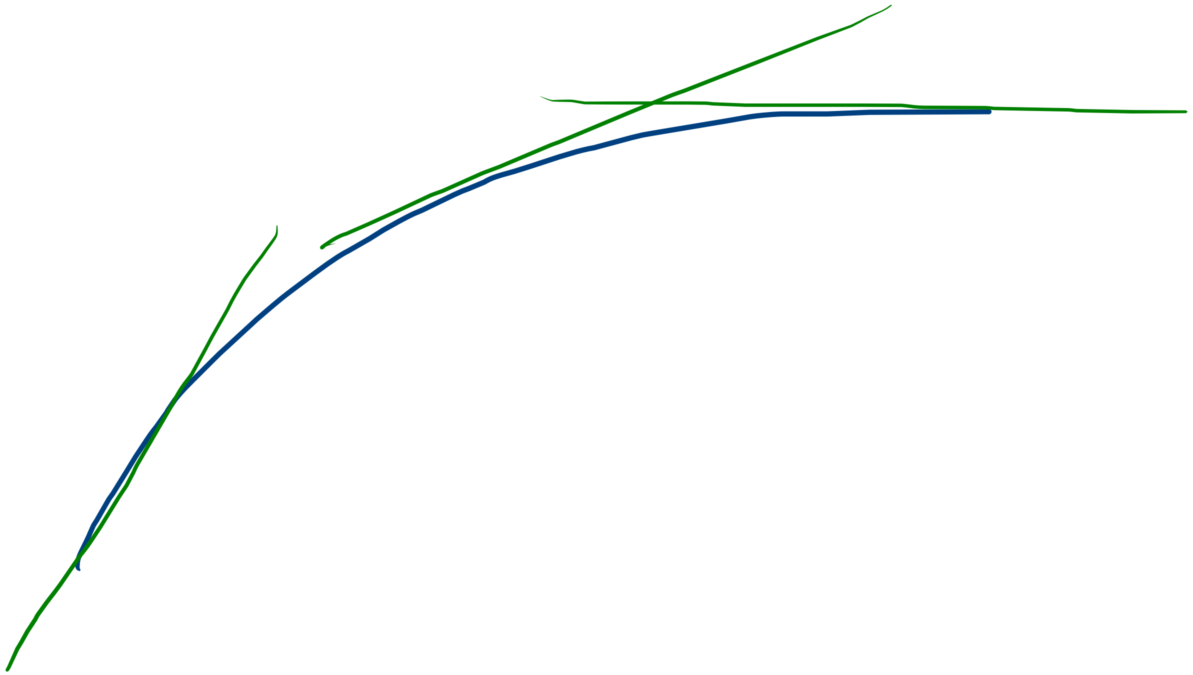
Una prima è che una funzione derivabile in un intervallo con derivata nulla su tale intervallo risulta costante.

Def Sia f derivabile in $]a,b[$

Diremo che f è CONVESSA in $]a,b[$
(CONCAVA)

se il grafico di f in $]a,b[$ si trova al di sopra (al di sotto) delle rette tangenti al grafico di f.





Ricordiamo che l'eq. della retta tangente al grafico di f in x_0 (ove si suppone f derivabile) è

$$y - f(x_0) = \underline{f'(x_0)}\,(x - x_0)$$

$$\boxed{y = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - x_0\cdot f'(x_0)}$$

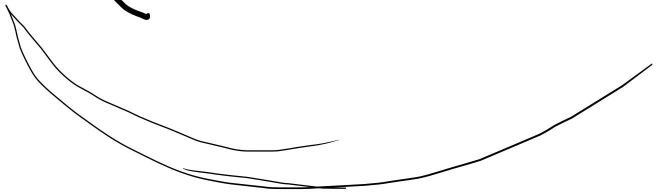
Allora, analiticamente, in $]a,b[$ f è CONVESSA se
(CONCAVA)

$\forall\, x \in\,]a,b[$ $\quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\forall\, x_0 \in\,]a,b[$ $\quad (\leq)$

Prop f **convessa** in $]a,b[$ $\iff$ f' crescente in $]a,b[$

(concava) (decrescente)



[$\Rightarrow$]

Dim Supponiamo f convessa.

$\underline{x_1 < x_2}$ in $]a,b[$

$\forall x, x_0 \in]a,b[$

$$\underline{f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)}$$

In particolare si ha

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

Quindi $f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_2) + f'(x_2)\,(x_1 - x_2) +$

$$+ \underline{f(x_1) + f'(x_1)} \cdot (x_2 - x_1)$$

$$0 \geq \underbrace{\left(f'(x_2) - f'(x_1)\right)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\substack{<0 \\ x_1 < x_2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{f'(x_2) \geq f'(x_1)}$$

ovvero f' è crescente.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suppongo f' crescente

$x_1 < x_2$ $\quad f'(x_1) < f'(x_2)$

$x_1, x_2 \in \,]a,b[$

Nell'intervallo $[x_1,x_2] \subset \,]a,b[$ sono soddisfatte per f le ipotesi del Teorema di Lagrange.

$\exists \; x_0 \in (x_1,x_2) \quad x_1 < x_0 \leq x_2$

$$\boxed{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \\ = f'(x_0)}$$

ossia

$x_1 < x_0 < x_2$

$$\boxed{f'(x_0)(x_2-x_1) = f(x_2)-f(x_1)}$$

$$\underline{f'(x_1) < f'(x_0) < f'(x_2)} \Longrightarrow$$

$$f'(x_0)(x_2-x_1) \geq f'(x_1)(x_2-x_1)$$

$$\|$$

$$f(x_2)-f(x_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)\cdot(x_2-x_1)}$$

$\forall x_2 > x_1$ $\forall x > x_1$ $f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2-x_1)$

Se $x_2 < x_1$ $f'(x_2) < f'(x_0) < f'(x_1)$

$$\boxed{f(x_2)-f(x_1) = f'(x_0)\cdot\underbrace{(x_2-x_1)}_{<0}}$$

$(x_2 - x_1) < 0$ implica che

che $f'(x_2) < f'(x_0) < f'(x_1)$

risulta $f'(x_2)(x_2 - x_1) > f'(x_0) \cdot (x_2 - x_1) > f'(x_1)(x_2 - x_1)$

$$f(x_2) - f(x_1) \geq f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ se $x_2 < x_1$

cioè f è convessa $\square$