

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un uomo in bicicletta, partendo da fermo, si muove con un'accelerazione costante $a = 1.21 \text{ m/s}^2$;

- ① determinare l'istante in cui ha percorso 5.32 m e qual'è, in tale istante, la sua velocità;
- ② determinare quale distanza percorre in un tempo doppio;
- ③ determinare quale distanza deve percorrere per raggiungere una velocità tripla.

Soluzione

① Si consideri un sistema di riferimento con un asse orizzontale avente come origine il punto di partenza dell'uomo in bicicletta; con questa scelta $x_0 = 0 \text{ m}$; poiché parte da fermo la sua velocità iniziale è nulla, quindi $v_0 = 0 \text{ m/s}$; la legge del moto della bicicletta, equazione (1.7), e la legge della velocità, equazione (1.5), sono quindi

$$x(t) = \frac{1}{2} at^2 \quad , \quad v(t) = at \quad ;$$

questa relazione può facilmente essere invertita per determinare l'istante, nota che sia la posizione:

$$t = \sqrt{\frac{2x(t)}{a}} \quad ;$$

con i dati numerici forniti dal testo si trova quindi che l'istante t_1 in cui $x = 5.32 \text{ m}$ è

$$t_1 = 2.97 \text{ s} \quad .$$

La velocità in questo istante è

$$v(t_1) = at_1 = 3.59 \text{ m/s} \quad .$$

Si sarebbe potuto determinare la velocità senza determinare l'istante osservando che vale

$$v(t) = a\sqrt{\frac{2x(t)}{a}} = \sqrt{2ax(t)} \quad .$$

② Nel tempo doppio la distanza percorsa è data dalla posizione

$$x(2t_1) = \frac{1}{2} a(2t_1)^2 = 2at_1^2 = 4x(t_1) = 21.3 \text{ m} \quad .$$

In un tempo doppio, la distanza percorsa è dunque quadrupla.

③ Poiché nel moto uniformemente accelerato velocità e tempo sono grandezze proporzionali, la velocità tripla è raggiunta in un tempo triplo. La distanza percorsa in tale tempo triplo è dunque

$$x(3t_1) = \frac{1}{2} a(3t_1)^2 = \frac{9}{2} at_1^2 = 9x(t_1) = 47.9 \text{ m} \quad .$$

Problema 2

Un camion si sta muovendo lungo una strada rettilinea alla velocità di 90.0 km/h, quando, a 85.0 metri di distanza vede una transenna che indica la chiusura della strada. L'autista del camion frena e il camion rallenta con una decelerazione di 3.80 m/s^2 . Determinare

- ① l'istante in cui il camion si ferma;
- ② a quale distanza dalla transenna il camion riesce a fermarsi;
- ③ a quale distanza dalla transenna la velocità è dimezzata.

*Problema 4

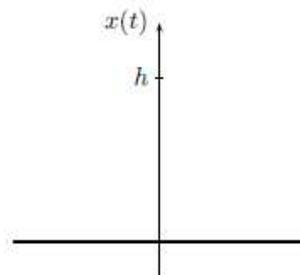
Un punto materiale viene lasciato cadere da un'altezza h ;

- ① determinare il tempo impiegato ad arrivare al suolo;
- ② determinare la velocità di impatto con il suolo;
- ③ si consideri in particolare il caso con $h = 8.00 \text{ m}$.

Soluzione

① Si consideri un sistema di riferimento con un asse verticale orientato verso l'alto e con lo zero al suolo, come in figura; sia h quindi la posizione iniziale. Poiché il punto materiale viene lasciato cadere, la velocità iniziale è nulla. L'accelerazione è orientata verso il basso e quindi ha segno negativo: $a = -g$. Nella situazione presente quindi l'equazione (1.6) si scrive

$$x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 .$$



Si tratta così di risolvere l'equazione

$$0 = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} . \quad (1.11)$$

② L'equazione (1.5) fornisce il valore della velocità in ogni istante; nel caso in questione si scrive

$$v(t) = -gt ,$$

quindi all'istante dato dalla (1.11) la velocità è

$$v = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh} . \quad (1.12)$$

Si osservi che la velocità è risultata negativa poiché è diretta verso il basso, cioè in verso opposto a quello positivo nel sistema di riferimento scelto.

③ Con $h = 8.00 \text{ m}$ si trova:

$$t = 1.28 \text{ s} \quad , \quad v = -12.5 \text{ m/s} .$$

*Problema 5

Un punto materiale viene lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_0 ;

- ① determinare l'istante in cui il punto materiale raggiunge l'altezza massima h e quale questa sia;
- ② determinare l'istante di ricaduta a terra e la velocità d'impatto;
- ③ si consideri in particolare il caso con $v_0 = 4.15 \text{ m/s}$.

Soluzione

① Con riferimento al sistema di riferimento verticale del problema precedente, l'equazione del moto e la legge della velocità si scrivono

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad , \quad v(t) = v_0 - g t .$$

L'istante t_1 in cui è raggiunta la massima altezza h è individuato dal fatto che in tale istante il punto materiale si ferma e quindi $v(t_1) = 0 \text{ m/s}$; quindi

$$v_0 - g t_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{g} .$$

L'altezza raggiunta in tale istante è

$$h = x(t_1) = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2g} .$$

② L'istante t_2 di ricaduta a terra è individuato dal fatto che in tale istante il punto materiale si trova a terra e quindi $x(t_2) = 0 \text{ m}$; quindi

$$v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0 .$$

Questa equazione ha due soluzioni: la prima è $t = 0 \text{ s}$ e corrisponde alla posizione iniziale; l'altra soluzione è

$$t_2 = 2 \frac{v_0}{g} = 2 t_1 ;$$

il tempo di volo completo è quindi il doppio del tempo di salita; detto altrimenti, il punto materiale impiega lo stesso tempo a salire ed a scendere. La velocità d'impatto è la velocità all'istante t_2 , quindi

$$v(t_2) = v_0 - g \cdot 2 \frac{v_0}{g} = -v_0 .$$

A parte il segno negativo, dovuto al fatto che la velocità finale è volta nel verso opposto a quella dell'asse si riferimento prescelto, la velocità finale ha lo stesso valore della velocità iniziale. Questo risultato è comprensibile osservando che, come visto, il moto di salita e di discesa durano lo stesso tempo, e poiché l'accelerazione è costante e negativa la diminuzione di velocità nello stesso intervallo di tempo deve essere la stessa: salendo da v_0 a 0 , scendendo da 0 a $-v_0$.

③ Con $v_0 = 4.15 \text{ m/s}$ si trova:

$$t_1 = 0.423 \text{ s} \quad , \quad h = 0.878 \text{ m} \quad , \quad t_2 = 0.846 \text{ s} \quad , \quad v(t_2) = -4.15 \text{ m/s} .$$

Problema 1

Si consideri una cassa di massa $m = 4.2\text{ kg}$ che scende, partendo da ferma, dalla sommità di un piano inclinato privo di attrito lungo $\ell = 7.5\text{ m}$ e alto $h = 3.8\text{ m}$;

- ① determinare le forze agenti sulla cassa;
- ② determinare il tempo impiegato ad arrivare in fondo al piano inclinato;
- ③ determinare la velocità finale;

Soluzione

① Sulla cassa agiscono la forza peso e la reazione vincolare; la forza peso è diretta verso il basso e ha modulo

$$P = mg = 41\text{ N} .$$

La reazione vincolare è perpendicolare al piano inclinato e il suo modulo può essere calcolato utilizzando la prima delle (2.3); occorre però prima determinare b mediante il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo formato dal piano inclinato:

$$b = \sqrt{\ell^2 - h^2} = 6.5\text{ m}$$

quindi

$$N = \frac{b}{\ell} mg = 36\text{ N} .$$

② Il moto di discesa è uniformemente accelerato con accelerazione data dalla seconda delle (2.4); quindi, utilizzando la legge del moto uniformemente accelerato, la relazione fra lo spazio percorso ℓ ed il tempo impiegato t è

$$\ell = \frac{1}{2} at^2$$

quindi

$$t = \sqrt{\frac{2\ell}{a}} = \sqrt{2\ell \frac{\ell}{gh}} = \sqrt{\frac{2}{gh}} \ell = 1.7\text{ s} .$$

③ La velocità all'istante t è data da

$$v = at = \frac{h}{\ell} g \sqrt{\frac{2}{gh}} \ell = \sqrt{2gh} = 8.6\text{ m/s} .$$

Si osservi che la velocità non dipende dalla pendenza o dalla lunghezza del piano, ma solo dalla sua altezza; si noti inoltre che la velocità finale è la stessa che si avrebbe avuto se la cassa fosse caduta liberamente da un'uguale altezza h , si veda l'equazione (1.12); si osservi infine che né il tempo impiegato, né la velocità finale dipendono dalla massa della cassa.

Problema 2

Per sollevare una cassa di massa m lungo un piano inclinato che formi con l'orizzontale un angolo $\alpha = 35^\circ$ un uomo deve applicare una forza di intensità $F = 600$ N;

- ① determinare la massa della cassa;
- ② determinare quale deve essere l'angolo di inclinazione del piano inclinato perché la forza necessaria al sollevamento diventi la metà.

Soluzione

① La forza necessaria al sollevamento deve essere uguale ed opposta alla risultante fra la forza peso agente sulla cassa e la reazione vincolare del piano. Dall'esercizio precedente risulta che tale forza ha intensità $F = mg \operatorname{sen} \alpha$, da cui si trova:

$$m = \frac{F}{g \operatorname{sen} \alpha} = 107 \text{ kg} .$$

② Poiché la forza è proporzionale al seno dell'angolo α , la forza viene dimezzata quando venga dimezzato il seno dell'angolo di pendenza del piano inclinato; quindi il nuovo angolo β è tale che valga

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha \quad \rightarrow \quad \beta = \operatorname{arcsen} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha \right) = 17^\circ .$$

Il problema svolto mette in evidenza il ruolo del piano inclinato come macchina semplice.

Problema 3

Per studiare la legge di moto accelerato, uno studente dispone di un piano inclinato liscio di lunghezza $\ell = 5.0$ m; vista la scarsa sensibilità dell'orologio che ha a disposizione, decide di inclinare il piano di un angolo α tale che il tempo impiegato da un punto materiale a percorrere l'intero piano inclinato, partendo da fermo, sia di almeno $t = 4.0$ s; determinare l'angolo massimo che il piano inclinato può formare con l'orizzontale.

Soluzione

Il moto lungo il piano inclinato è un moto uniformemente accelerato, la cui accelerazione è data dalla (2.4); la legge del moto uniformemente accelerato quindi fornisce la relazione

$$\ell = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\ell} g t^2$$

da cui si trova

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{\ell} = \frac{2\ell}{g t^2} \quad \rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arcsen} \frac{2\ell}{g t^2} = 3.6^\circ .$$

Problema 1

Si consideri un punto materiale P di massa $m = 248 \text{ g}$ appoggiato su di una superficie orizzontale scabra; sapendo che i coefficienti di attrito fra P e la superficie valgono $\mu_s = 0.78$ e $\mu_d = 0.42$, determinare:

- ① il modulo della minima forza orizzontale che è necessario applicare per mettere P in movimento;
- ② il modulo R^M della massima reazione vincolare statica esplicabile dal vincolo;
- ③ il modulo dell'accelerazione di P se la forza agente ha modulo $F = 1.50 \text{ N}$.

Soluzione

① La minima forza F_m che necessario applicare per mettere P in movimento è uguale alla massima forza di attrito statico che il vincolo può fornire, quindi, usando la prima delle (2.5) e osservando che per un piano orizzontale vale $N = mg$, si ottiene

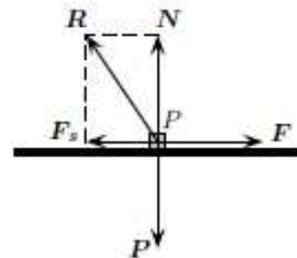
$$F_m = F_s^M = \mu_s N = \mu_s mg = 1.90 \text{ N} .$$

② La massima reazione vincolare è la somma della componente perpendicolare N e della massima forza di attrito statico F_s^M ; queste forze sono perpendicolari, quindi

$$R^M = \sqrt{N^2 + F_s^M{}^2} = N\sqrt{1 + \mu_s^2} = \frac{N}{\cos \beta_s} = 3.09 \text{ N} .$$

③ In questo caso, facendo riferimento alla figura, agiscono sul punto materiale P le due forze vincolari N e F_d , la forza peso P e la forza agente F ; N e P sono uguali ed opposte e quindi la loro somma è il vettore nullo quindi la forza risultante è la somma dei due vettori orizzontali ma di verso opposto F_d ed F ; applicando la legge di Newton (2.1) si ottiene

$$F - F_d = ma \quad \rightarrow \quad a = \frac{F - F_d}{m} = \frac{F - \mu_d mg}{m} = 1.93 \text{ m/s}^2 .$$



*Problema 2

Un punto materiale di massa $m = 2.66 \text{ kg}$ è appoggiato sulla superficie di un piano inclinato scabro di altezza $h = 1.27 \text{ m}$ e lunghezza $\ell = 2.54 \text{ m}$; sapendo che il coefficiente di attrito statico fra le due superfici a contatto vale $\mu_s = 0.75$, determinare se il punto materiale scende lungo il piano inclinato e, nel caso, determinarne l'accelerazione.

Soluzione

Con riferimento alla figura, la forza agente sul punto materiale a causa dell'inclinazione del piano è la componente F della forza peso P parallela al piano, mentre la forza massima di attrito statico F_s^M è proporzionale alla componente N della forza peso perpendicolare al piano; per i rispettivi moduli valgono infatti le equazioni

$$F = \frac{h}{\ell} mg \quad , \quad F_s^M = \mu_s N = \mu_s \frac{b}{\ell} mg$$

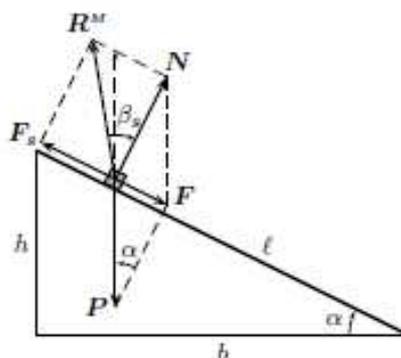
quindi l'attrito statico riesce ad equilibrare la forza agente, e quindi a tenere fermo il punto materiale, se vale $F_s^M > F$, cioè se

$$\frac{h}{\ell} > \mu_s \frac{b}{\ell} ;$$

si noti che la condizione di equilibrio è indipendente dalla massa del punto materiale. Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\frac{h}{\ell} = 0.45 \quad , \quad \mu_s \frac{b}{\ell} = 0.67 .$$

Il punto materiale quindi non scende lungo il piano inclinato. Si osservi l'angolo di apertura del cono di attrito statico, l'angolo β_s formato dalla reazione vincolare massima R^M e la perpendicolare al piano, è maggiore dell'angolo di inclinazione del piano e quindi il vincolo riesce ad opporre alla forza peso una forza, tratteggiata in figura, *interna* al cono.



Problema 3

Un corpo di massa $m = 8.74 \text{ kg}$ poggia su di un piano orizzontale scabro; su di esso viene applicata una forza di trazione T avente modulo $T = 60.6 \text{ N}$ avente una direzione che forma un angolo $\alpha = 45^\circ$ con l'orizzontale; sapendo che il coefficiente di attrito dinamico fra le due superfici è $\mu_d = 0.62$, determinare il moto del corpo.

Soluzione

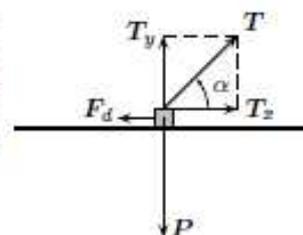
Sul corpo agiscono tre forze: il peso, la reazione vincolare del piano di appoggio e la forza di trazione; per determinare il moto del corpo è necessario determinare la risultante F di queste tre forze ed applicare la relazione di Newton (2.1). Convien considerare le forze per componenti; indicate, come d'uso, con x la componente orizzontale e con y la componente verticale, si ha

$$\begin{aligned} F_x &= T_x - F_d = ma_x \\ F_y &= N + T_y - P = 0 . \end{aligned}$$

Nella seconda delle precedenti equazioni N , per chiarezza non rappresentato in figura, è il modulo della componente verticale della reazione vincolare; ricordando la seconda delle (2.5), si ottiene

$$a_x = \frac{T_x - F_d}{m} = \frac{T_x - \mu_d N}{m} = \frac{T_x - \mu_d (P - T_y)}{m} = \frac{T_x - \mu_d T_y}{m} - \mu_d g = 1.9 \text{ m/s}^2 .$$

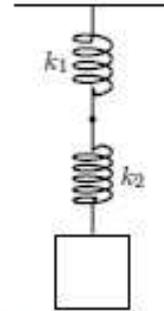
Si tratta quindi di un moto uniformemente accelerato.



Problema 3

Un punto materiale di forma cubica di massa $m = 6.5 \text{ kg}$ è appeso ad un piano orizzontale per mezzo di due molle collegate fra loro come in figura aventi costante elastica $k_1 = 370 \text{ N/m}$ e $k_2 = 520 \text{ N/m}$; determinare

- ① l'allungamento delle due molle;
- ② la costante elastica della molla che è necessario porre al posto delle due date, per avere un stesso allungamento.



Soluzione

① Il peso del punto materiale cubico è equilibrato dalla forza elastica della seconda molla, la quale, a sua volta è equilibrata dalla forza elastica della prima molla; quindi le due forze elastiche sono uguali e gli allungamenti sono diversi; vale quindi la seguente relazione fra i moduli delle forze

$$k_1 \Delta x_1 = k_2 \Delta x_2 = mg$$

quindi l'allungamento di ciascuna delle due molle è dato da

$$\Delta x_1 = \frac{mg}{k_1} = 0.17 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \Delta x_2 = \frac{mg}{k_2} = 0.12 \text{ m} .$$

② Sostituendo alle due molle date una molla di costante elastica k tale che l'allungamento complessivo sia lo stesso, e quindi uguale alla somma degli allungamenti delle due molle, deve valere

$$mg = k(\Delta x_1 + \Delta x_2) = mg \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) k \quad \rightarrow \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

e quindi

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 216 \text{ N/m} .$$

Il reciproco della costante elastica equivalente quindi è la somma dei reciproci delle costanti elastiche. In questa configurazione le due molle si dicono lavorare *in serie*.

Problema 1

Un'automobilista che viaggia ad una velocità costante di modulo $v_0 = 50 \text{ km/h}$ vede un ostacolo e frena bruscamente; sapendo che la massa dell'automobile è $m = 850 \text{ kg}$ e che spazio di frenata è $s = 30 \text{ m}$,

- ① determinare il modulo della forza frenante F_f ;
- ② determinare, con la stessa forza di attrito, quale diventa lo spazio di frenata per una velocità iniziale di modulo $v_1 = 100 \text{ km/h}$.

Soluzione

① Da quando l'automobilista inizia a frenare l'unica forza che compie lavoro è quella frenante; tale lavoro è quindi responsabile della variazione di energia cinetica da valore iniziale a zero; ricordando che la forza frenante si oppone al moto e quindi ha un valore negativo, si ha

$$\mathcal{L}_f = -F_f s = -\frac{1}{2} m v_0^2 \quad \rightarrow \quad F_f = \frac{m v_0^2}{2s} = 2.7 \cdot 10^3 \text{ N} .$$

② Usando la medesima relazione si trova

$$s_1 = \frac{m v_1^2}{2F_f} = \frac{v_1^2}{v_0^2} s = 120 \text{ m} .$$

si noti che la distanza di frenata è proporzionale al quadrato della velocità e quindi raddoppiando la velocità lo spazio di frenata diventa il quadruplo.

Problema 2

Un punto materiale di massa $m = 18 \text{ kg}$ scende lungo un piano inclinato di altezza $h = 2.5 \text{ m}$; sapendo che parte da fermo e che non sono presenti forze di attrito, determinare

- ① il lavoro compiuto dalla forza peso quando il punto materiale è giunto in fondo al piano inclinato;
- ② il modulo della velocità finale.

Soluzione

① Lo spostamento ha modulo uguale alla lunghezza ℓ del piano inclinato; indicando con α l'angolo di inclinazione si ha

$$\mathcal{L} = mg\ell \sin \alpha = mgh = 440 \text{ J} ,$$

ove si è usata la relazione $h = \ell \sin \alpha$.

② Usando il teorema dell'energia cinetica, poiché l'energia cinetica iniziale è nulla si ha che l'energia cinetica finale è uguale al lavoro delle forze agenti. L'unica altra forza agente oltre al peso è la reazione vincolare del piano inclinato che, in assenza di attrito, è perpendicolare allo spostamento e quindi compie lavoro nullo; pertanto l'energia cinetica finale è uguale al lavoro compiuto della forza peso, vale cioè

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = 7.0 \text{ m/s} ,$$

risultato che concorda con quanto già trovato, con un calcolo più elaborato, studiando il piano inclinato.

Problema 3

Un punto materiale di massa $m = 18 \text{ kg}$ scende lungo un piano inclinato di altezza $h = 2.5 \text{ m}$ e lunghezza $\ell = 7.5 \text{ m}$; sapendo che parte da fermo e che la velocità in fondo al piano inclinato ha modulo $v = 5.0 \text{ m/s}$, determinare il modulo della forza di attrito radente dinamico presente fra il punto materiale e la superficie del piano inclinato.

Soluzione

Osservando che le forze che compiono un lavoro diverso da zero sono la forza peso e la forza di attrito dinamico, per il teorema dell'energia cinetica deve valere la seguente relazione

$$\mathcal{L}_p + \mathcal{L}_d = \frac{1}{2}mv^2 .$$

Il lavoro della forza peso è stato determinato nell'esercizio precedente e vale $\mathcal{L}_p = mgh$; per determinare il lavoro della forza di attrito dinamico basta osservare che si tratta di una forza costante che ha la stessa direzione ma verso opposto dello spostamento; vale quindi $\mathcal{L}_d = -F_d\ell$. Si ha pertanto

$$mgh - F_d\ell = \frac{1}{2}mv^2 \quad \rightarrow \quad F_d = \frac{m}{2\ell}(2gh - v^2) = 29 \text{ N} .$$

Problema 2

Una lampadina a incandescenza consuma una potenza $\mathcal{P} = 100 \text{ W}$; determinare l'energia che è necessario fornirle per mantenerla accesa per quattro ore.

Soluzione

Dalla definizione di potenza, equazione (3.2), si trova immediatamente che l'energia necessaria richiesta è il prodotto della potenza per il tempo in secondi, e quindi

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}t = 1.44 \cdot 10^6 \text{ J} .$$

Problema 3

Un'automobile di massa $m = 720 \text{ kg}$ è sottoposta ad una forza di modulo costante ed accelera da una velocità di modulo $v_1 = 3.5 \text{ m/s}$ a una velocità di modulo $v_2 = 12 \text{ m/s}$ in nello spazio $s = 30 \text{ m}$; determinare

- ① il modulo della forza esercitata dal motore ed il lavoro da esso svolto;
- ② la potenza erogata dal motore.

Soluzione

① Il lavoro esercitato dalla forza può esse ottenuto dal teorema dell'energia cinetica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = 4.7 \cdot 10^4 \text{ J} ;$$

e, visto che la forza è costante, tale lavoro è uguale al modulo della forza per il modulo dello spostamento, e quindi

$$F = \frac{\mathcal{L}}{s} = \frac{1}{2s} m (v_2^2 - v_1^2) = 1.6 \text{ N} .$$

② Visto che la forza è costante, il moto è uniformemente accelerato; lo spazio percorso nel moto uniformemente accelerato è dato, equazione (1.10), da

$$s = \frac{v_1 + v_2}{2} t \quad \longleftrightarrow \quad t = \frac{2s}{v_1 + v_2}$$

e quindi la potenza sviluppata è

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{L}}{t} = \frac{m}{4s} (v_2^2 - v_1^2)(v_1 + v_2) = 1.2 \cdot 10^4 \text{ W} .$$