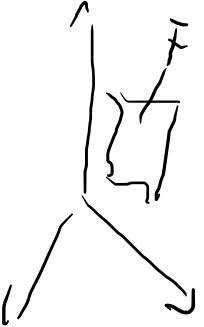


$$I_z = \iiint_S x^2 + y^2 dm = \iiint \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz = *$$

$\left\{ (\rho, \theta, z)^T : a \leq z \leq b, f(z) \leq \rho \leq g(z), \theta \in [0, \pi] \right\}$



$$F: \left\{ \begin{matrix} (x, z)^T \\ \rho \end{matrix} \dots \right\}$$

$$S = \left\{ \begin{matrix} x = \rho \cos \theta & y = \rho \sin \theta & (\rho, z)^T \in F \end{matrix} \right\}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

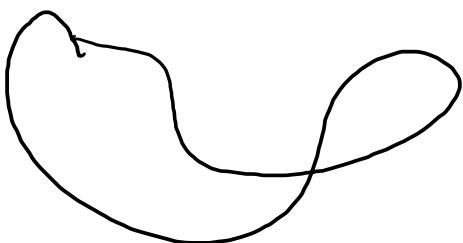
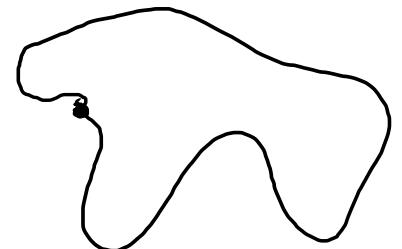
$$+ \int_0^{2\pi} \left( \int_a^b \left( \int_{f(z)}^{g(z)} \rho^3 d\rho \right) dz \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_a^b \frac{1}{4} (g(z)^4 - f(z)^4) dz \right) d\theta =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{4} \int_a^b (g^4(z) - f^4(z)) dz$$

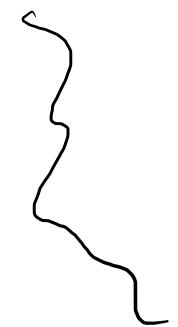
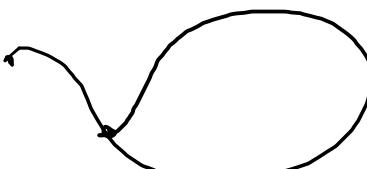
# Curve in $\mathbb{R}^n$

$I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo     $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua ;     $\gamma(I) = \Gamma$  si dice il sostegno della curva

- $\gamma: [\bar{a}, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice chiusa se     $\gamma(b) = \gamma(a)$                                   $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$
- $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice semplice se
  - 1)  $\gamma$  non chiusa : se  $\gamma$  è iniettiva ( $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$ )
  - 2)  $\gamma$  è chiusa:  $I = [\bar{a}, b]$ ,  $\gamma$  iniettiva su  $[\bar{a}, b]$  e su  $[a, b]$ .



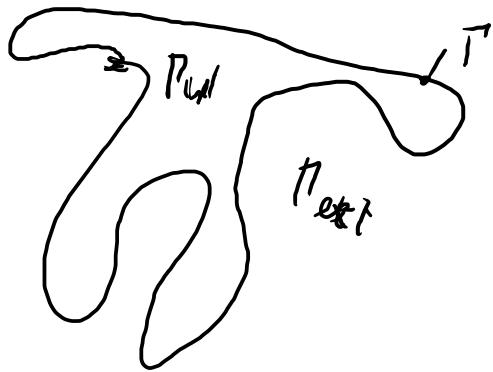
non è semplice



## Teorema della curva di Jordan

$$= \gamma(I)$$

Sia  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva semplice chiusa. Allora  $\Gamma$  separa il piano in due componenti  $\Gamma_{int}$  e  $\Gamma_{ext}$ .  $\Gamma_{int}$  è luminoso,  $\Gamma_{ext}$  è illuminato,  $\mathbb{R}^2 = \Gamma_{int} \cup \Gamma \cup \Gamma_{ext}$



- Una curva  $\gamma$  si dice regolare se è derivabile  $(C^1)$  e  $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$ .

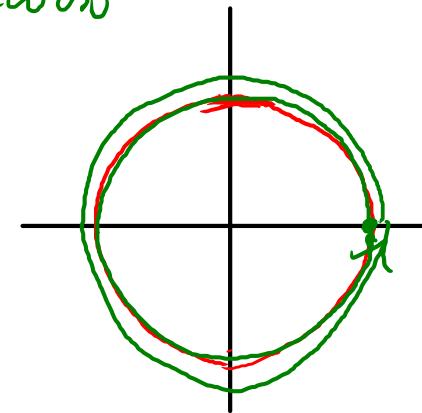
In questo modo ogni punto della curva ha un vettore tangente  $\gamma'(t)$

Esempio:  $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)^T \quad t \in [0, \pi]$

$\Rightarrow \gamma_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t)^T \quad t \in [0, \pi]$  vettore percorso due volte

$$\gamma_3(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))^T \quad t \in [0, 1]$$

$$P_1 = P_2 = P_3 \quad \gamma_3(t) = \gamma_1(2\pi t)$$



$\gamma_2$  non è semplice;  $\gamma_2$  è essenzialmente  $\gamma_1$

$\gamma_1$ ,  $\gamma_3$  sono equivalenti (è un cambio di variabile)

Definizione: Si dicono  $\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  equivalenti se  $\gamma_1 \circ \gamma_2$  si dicono equivalenti

se esiste  $h \in C^1(I_2, I_1)$  invertibile con inverso  $\in C^1(I_1, I_2)$  tale che  $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h$

Es  $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)^T \quad t \in [0, 2\pi]$

$\gamma_2(u) = (\cos(2\pi u), \sin(2\pi u))^T \quad u \in [0, 1]$

$h: [0, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$   $h(u) = 2\pi u$   $h^{-1}(t) = \frac{1}{2\pi} t$

$h$  è strettamente monotone  
 $h'(t) > 0 \quad \forall t$

oppure  $h'(t) < 0 \quad \forall t$

$$(\gamma_1 \circ h): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma_1(2\pi u) = \gamma_2(u)$$

Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  curve equivalenti; si dice che hanno lo stesso verso se la  $\gamma$  è l'ide che  $\gamma'_1(t) > 0 \ \forall t$ ; altrimenti si dice che hanno verso opposto.

Esempio: astroide

$$\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)^T \quad \gamma(0) = \gamma(\pi) = (1, 0)^T \text{ chiuso}$$

$\gamma$  è semplice?

~~$\gamma'(t) = (0, 0)^T$~~  ?

Si

$\gamma$  è regolare?

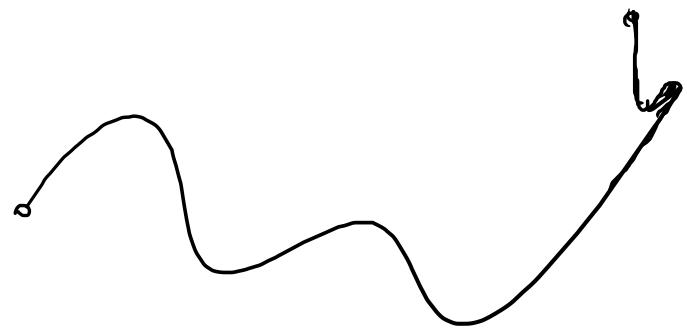
$$\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)^T$$

$$\gamma'(t) = (0, 0)^T \quad t = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi$$

NON è regolare; è regolare o frotto

## Teorema

Due curve regolari semplici NON chiuse che hanno lo stesso sostegno sono equivalenti.



Es: si scrive l'equazione cartesiana della retta tangente lo curve regolare

semplificando  $\gamma(t) = (\text{cost. sent}, t)^T$  nel punto  $(0, \frac{\pi}{2})^T$

$$t = \frac{\pi}{2} \quad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)^T \quad \gamma'(t) = (-\sin t + \cos t, 1)^T \quad \gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underbrace{(-1, 1)^T}$$

retta tangente  $r(s) = \gamma(t_0) + s\gamma'(t_0) \quad s \in \mathbb{R}$

$$r(s) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)^T + s(-1, 1)^T = \left(-s, \frac{\pi}{2} + s\right)^T \quad \begin{cases} x = -s \\ y = \frac{\pi}{2} + s \end{cases} \quad s = -x$$

$$\boxed{y = \frac{\pi}{2} - x}$$

Lunghezza di una curva

Possiamo usare l'integrale di Riemann per definire la lunghezza di una curva in  $\mathbb{R}^n$ ? NO

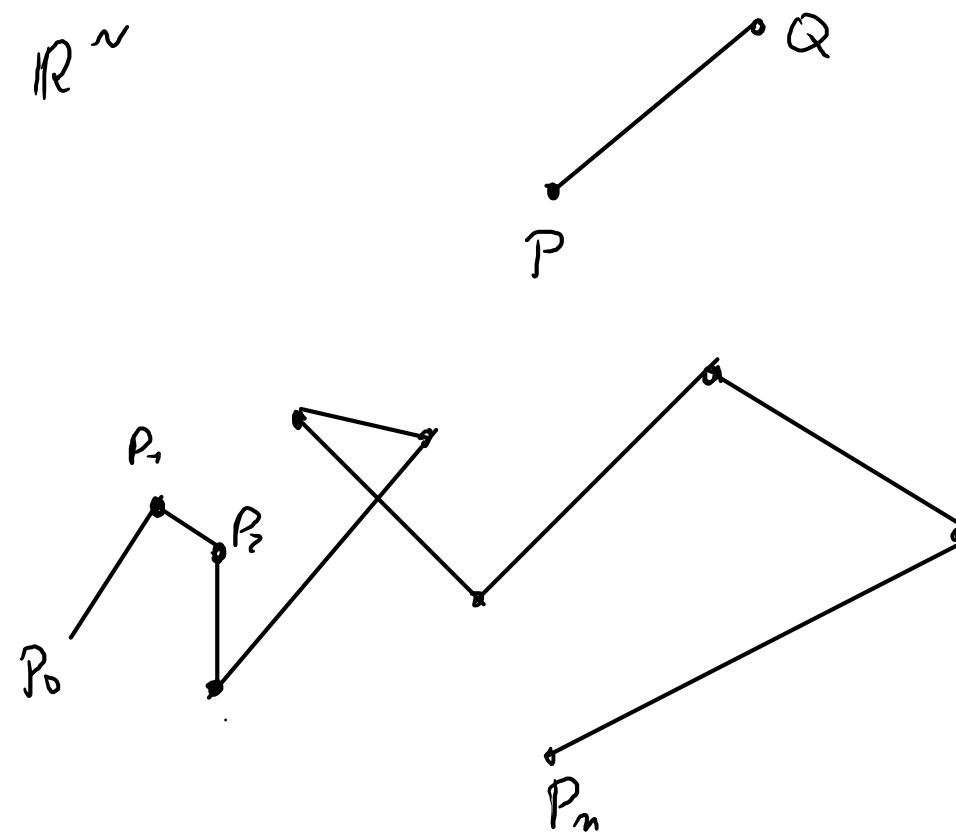
Consideriamo un segmento in  $\mathbb{R}^n$

$$\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \gamma(t) = P + t(Q-P)$$

$$l(\gamma) = \|Q-P\|$$

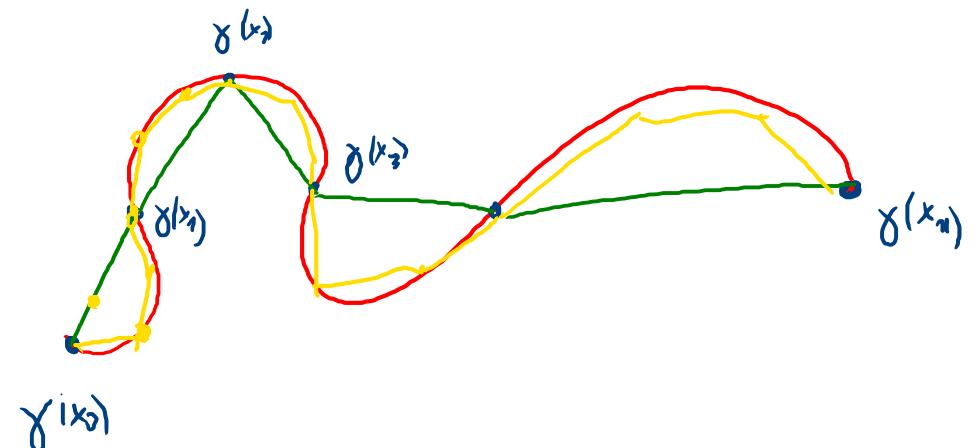
Se  $\gamma$  è una poligonale

$$l(\gamma) = \sum_{k=1}^n \|P_k - P_{k-1}\|$$



Se  $\gamma$  è una curva "liscia", possiamo approssimare con poligonalni

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$



Sia  $S \in \Delta([a, b])$  una decomposizione

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$\gamma(x_i)$  sono punti di  $\Gamma$

consideriamo lo poligono individuato dai punti  $\gamma(x_i)$ :  $\pi(S)$

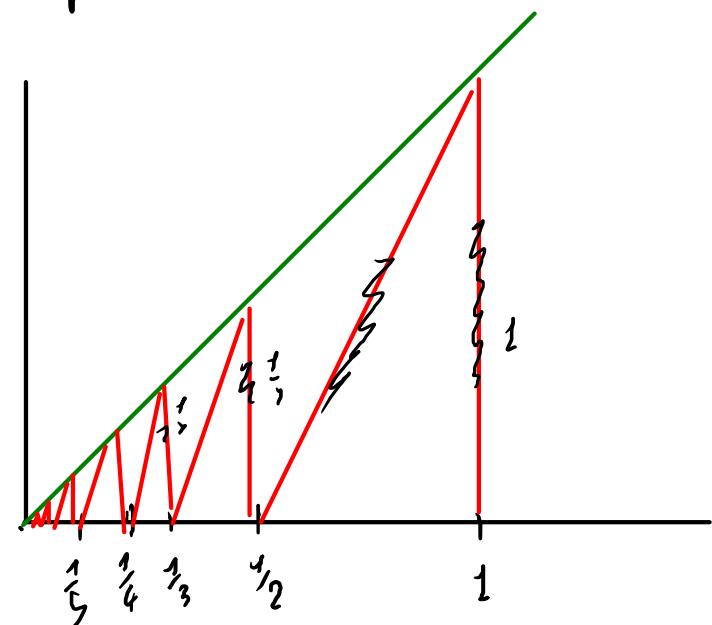
$$l(\pi(S)) = \sum_{k=1}^n \|\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})\|$$

Sia  $S'$  più fine di  $S$ , allora  $l(\pi(S')) > l(\pi(S))$

Definiamo lunghezza di  $\gamma$  il  $\sup \left\{ \ell(\pi(s)) : s \in \Delta(I) \right\} = \ell(\gamma)$

Se questo sup è finito la curva si dice rettificabile.

Esempio di curva limitata non rettificabile



$\gamma$  è continua, limitata,  $\ell(\gamma) = +\infty$

Considero lo poligono  $\pi$



$$\ell(\pi) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\sup \ell(\pi) = +\infty$$

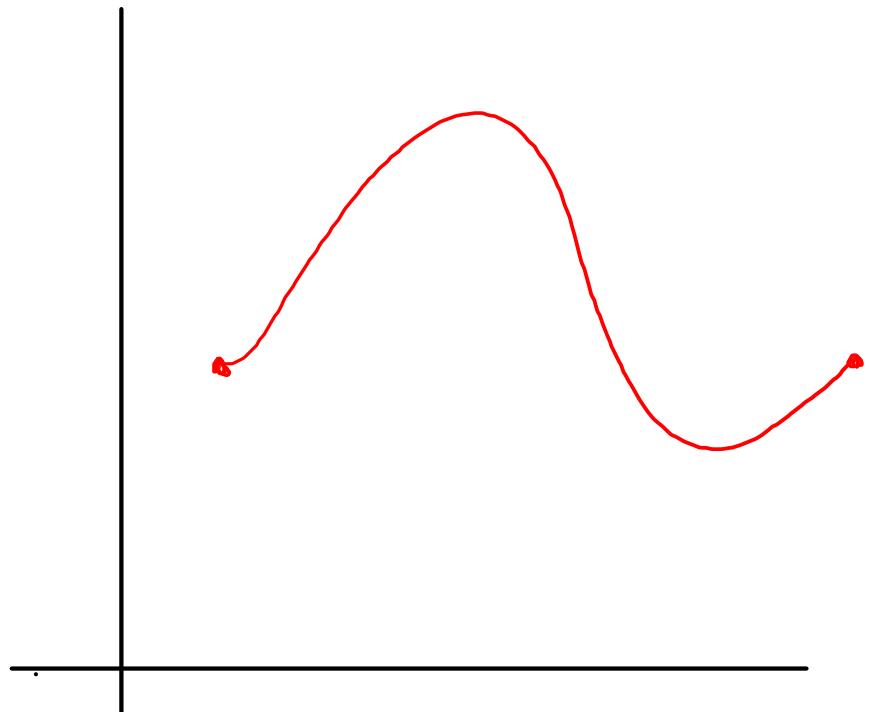
Come calcolare la lunghezza?

Teorema di rettificabilità delle curve regolari

Si è  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva di classe  $C^1$ . Allora  $\gamma$  è rettificabile e  $\ell(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

Teorema

Si ha  $\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$



$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\gamma(t) = (t, f(t))^T$$

$$\ell(\gamma) = ?$$

$$\gamma'(t) = (1, f'(t))^T$$

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$