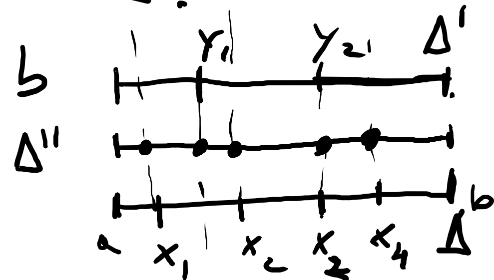
1° dicembre

L'ultimo lemma è stato

Lemma $\forall\ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata e per ogni coppia di decomposizioni $\Delta'\leq\Delta$ si ha

$$s(\Delta)\leq s(\Delta')\leq S(\Delta')\leq S(\Delta)$$

Lemma Dato $[a,b]$, chiuso e limitato, e date due decomposizioni Δ e Δ', esiste una decomposizione Δ'' che è un raffinamento sia di Δ che di Δ'.



Dim Δ' $\quad y_0 = a < \dots\dots < y_m = b$

Δ $\quad x_0 = a < \dots\dots < x_n = b$

Δ'' formata ordinando gli elementi di $\{a, b, x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{m-1}\} \to z_0 = a < \dots\dots < z_L = b$

Siccome nella sequenza $z_0 = a < \cdots < z_L = b$ sono compresi tutti gli $x_0 = a < \cdots < x_n < b$ e tutti gli $y_0 = a < \cdots < y_m = b$, risulta che $\Delta'' \preceq \Delta$ e $\Delta'' \preceq \Delta'$. $\square$

Corollario Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e due decomposizioni Δ e Δ' di $[a,b]$, allora

$$s(\Delta) \leq S(\Delta').$$

Dim Sia Δ'' un raffinamento sia di Δ che di Δ'

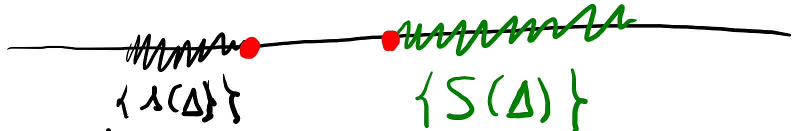
abbiamo

$$s(\Delta) \leq s(\Delta'') \leq S(\Delta'') \leq S(\Delta')$$

$$\Longrightarrow \quad s(\Delta) \leq S(\Delta') \qquad \square$$

Def Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

denotiamo



$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(\Delta) : \Delta \text{ decomp. di } [a,b]\}$$

e lo chiamiamo l'integrale inferiore.

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S(\Delta) : \Delta \text{ decomp. di } [a,b]\}$$

È ovvio che $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Def Diremo che $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, limitata, è integrabile per Darboux se

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

In questo caso denoteremo il ~~lor~~ loro comune valore con $\int_a^b f(x)\,dx$, che chiameremo l'integrale di Darboux di f in $[a,b]$.

Esempio Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è limitata, con

$m \le f(x) \le M \quad \forall x\in[a,b]$, allora

$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le M(b-a) \quad *$$

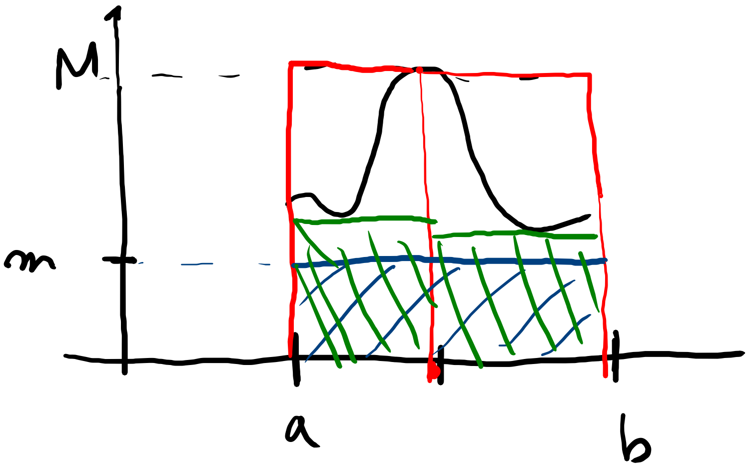
Abbiamo visto che $\forall \Delta$

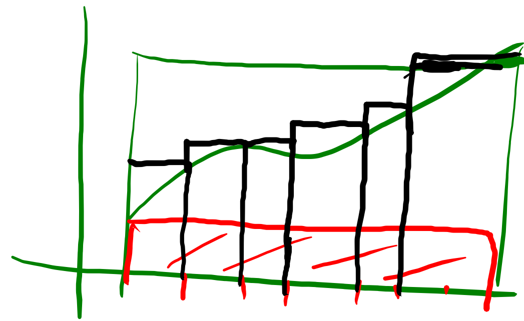
$$m(b-a) \le s(\Delta) \le S(\Delta) \le M(b-a)$$

$$m(b-a) \le s(\Delta) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(\Delta) \le M(b-a)$$

$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x$ allora

$$m(b-a) \leq s(\Delta) \leq S(\Delta) \leq M(b-a)$$





$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$, allora

$$m(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Esempio $f(x) \equiv c$ in $[a,b]$

$s(\Delta) = c(b-a)$

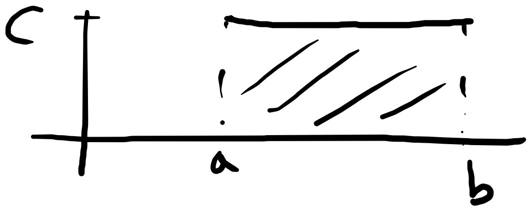
$$\underline{\int_a} ^b f(x)\,dx = \sup\{c(b-a)\} = c(b-a)$$

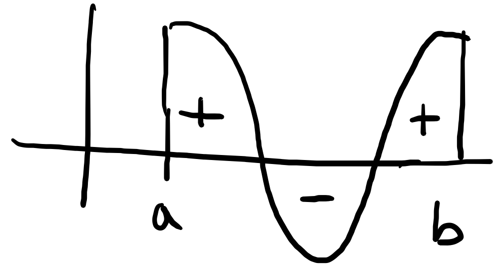
$S(\Delta) = c(b-a)$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S(\Delta) : \Delta \text{ decomp. di } [a,b]\} = \inf\{c(b-a)\} = c(b-a)$$

uguali

Allora esiste $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$





<u>Esempio</u> $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ in $[a,b]$

$s(\Delta) = 0 \quad , \quad S(\Delta) = b-a$

$\underline{\int_a^b} D(x)\,dx = \sup\{s(\Delta)\} = \sup\{0\} = 0$

$$\overline{\int_a^b} D(x)\,dx = \inf\{S(\Delta)\} = \inf\{b-a\} = b-a$$

$$\underline{\int_a^b} D(x)\,dx = 0 < b-a = \overline{\int_a^b} D(x)\,dx$$

Quindi $D(x)$ non è integrabile per Darboux.

Teorema Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata. Sono equivalenti

1) f è integrabile per Darboux

2) $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ una decomposizione Δ_ε t.c.

$$0\le S(\Delta_\varepsilon)-s(\Delta_\varepsilon)<\varepsilon$$

Dim 1) $\Rightarrow$ 2) Se f è integrabile allora

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx=\overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$ Sia $\varepsilon>0$.

Esiste uno Δ t.c.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(\Delta)$$

ed esiste Δ' t.c.

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} > S(\Delta')$$

Sia $\Delta'' \succcurlyeq \Delta$, $\Delta'' \succcurlyeq \Delta'$. Allora

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(\Delta) \leq s(\Delta'') \leq S(\Delta'') \leq S(\Delta') < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ho dimostrato che $\exists\ \Delta''$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(\Delta'') \leq S(\Delta'') < \int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 \leq S(\Delta'') - s(\Delta'') < \left(\int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$= \varepsilon$$

cioè abbiamo dimostrato l'esistenza di Δ_ε

Abbiamo dimostrato $1 \Rightarrow 2$.

Ora dimostriamo $2 \Rightarrow 1$ cioè dimostriamo che

$$\left[\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \Delta_\varepsilon \quad \text{t.c.} \quad 0 \leq S(\Delta_\varepsilon) - s(\Delta_\varepsilon) \leq \varepsilon\right] \quad (2)$$

implica che f è integrabile in $[a, b]$.

Per ogni decomposizione Δ si ha

$$s(\Delta) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(\Delta) \quad .\ \text{Per } \Delta_\varepsilon$$

$$s(\Delta_\varepsilon) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(\Delta_\varepsilon)$$

$$s(\Delta_\varepsilon) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(\Delta_\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(\Delta_\varepsilon) - s(\Delta_\varepsilon) < \varepsilon$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0$

$$0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$, cioè f e' integrabile. Quindi dimostrato che $(2) \Rightarrow (1)$

$\square$

<u>Teor</u> Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona. Allora $f \in L[a,b]$.

<u>Dim</u> Sia f crescente.

Decomponiamo $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ in modo $x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n}$

$x_1 - x_0 = x_1 - a = \frac{b-a}{n}$ $\qquad x_1 = a + \frac{b-a}{n}$

$x_2 - x_1 = \frac{b-a}{n}$ $\qquad x_2 = x_1 + \frac{b-a}{n} = a + 2\,\frac{b-a}{n}$

$\Delta_n \qquad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \qquad x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \qquad x_3 = a + 3\frac{b-a}{n}$

$\ldots \quad x_j = a + j\frac{b-a}{n}, \ldots, \quad x_n = a + \cancel{n}\frac{b-a}{\cancel{n}} = b$

$$S(\Delta_n) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_j) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

$$s(\Delta_n) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})$$

$$S(\Delta_n) - s(\Delta_n) = \frac{b-a}{n} \left(\sum_{j=1}^{n} f(x_j) - \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}) \right)$$

$$0 \leq S(\Delta_n) - s(\Delta_n) = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} f(x_j) - \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\right)$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(f(x_n) - f(x_0)\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Abbiamo trovato una successione di decomposizioni $\{\Delta_n\}$ t.c.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S(\Delta_n) - s(\Delta_n)\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n$ t.c. $0 \leq S(\Delta_n) - s(\Delta_n) < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ f soddisfa la (2) del teor precedente $\Rightarrow f \in L[a,b]$.

<u>Teor</u> Date $f, g \in L[a,b]$ e date due costanti λ e μ.

1) $\lambda f(x) + \mu g(x)$ e' integrabile e si ha

$$\int_a^b \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

2) Se $f(x) \cdot g(x) \in L[a,b]$ $\square$