Equazioni differenziali

"Un'equazione differenziale è una equazione che mostra un legame tra una funzione e le sue derivate"

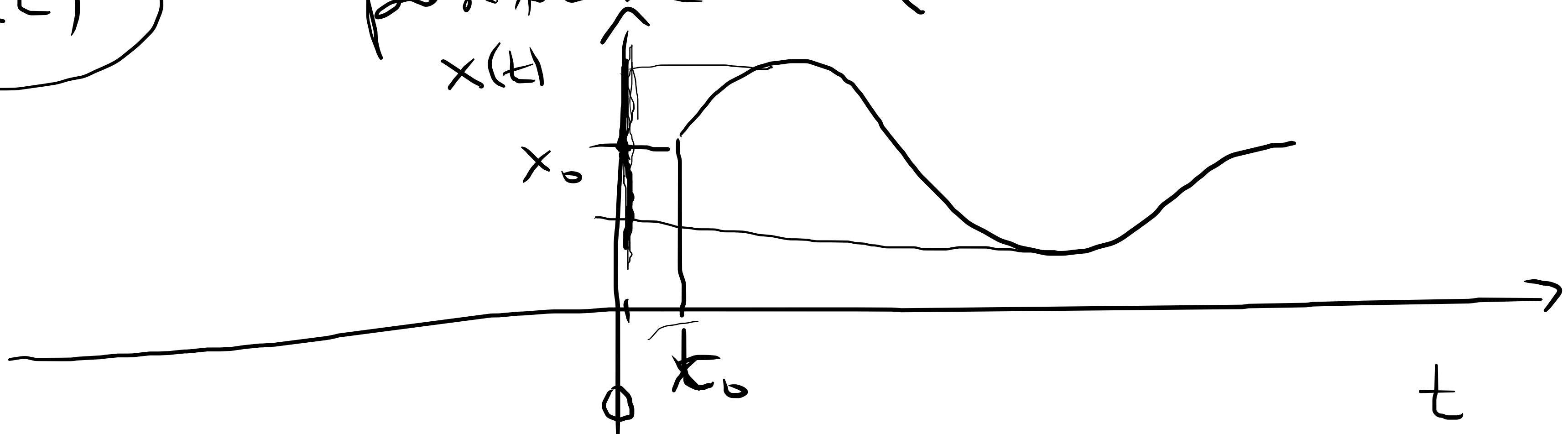
$$f \qquad f' \qquad f'' \quad \cdots \quad f^{(n)}$$

funzione ~~reale~~ di variabile reale

derivata n-simo di f

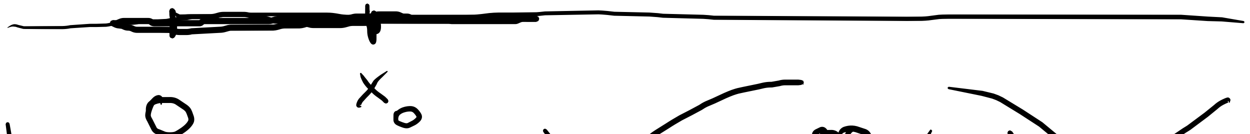
t variabile indipendente (TEMPO)

$x(t)$ posizione (su un asse)



$$\frac{dx(t)}{dt} = x'(t) \left(= \dot{x}(t) \right)$$

derivata prima di x



$$x''(t) = \frac{d^2 x(t)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dt} x(t)\right) = \ddot{x}(t)$$

derivata seconda di x

$$\dddot{x}(t) = x'''(t) = \frac{d}{dt} x''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) = \frac{d^3}{(dt)^3} x(t)$$

$$x^{(n)}(t) = \frac{d}{dt} x^{(n-1)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}}{(dt)^{n-1}} x(t)\right) =$$

$$= \frac{d^n}{dt^n} x(t)$$

Si dice ORDINE dell'eq. differenz.
il numero (n) presente nell'equazione differenziale
considerat — massimo
delle derivate di x

$x(t)$ è la variabile dell'equazione e dipende
dalla variabile indipendente t

Esempi:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x'(t) = -2t\,x(t)$$

è un'eq differenziale
in x (di variabile indip t)

di ordine 1
(primo ordine)

- $\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \boxed{x''(t) = -k\,x(t)}$

ep differenziale del secondo ordine o di ordine 2 in x
(di variabile indipendente t che non compare esplicitamente in questa equazione)

- $x'(t) = \text{sen}\, x(t)$

ep diff. primo ordine
(t non compare esplicitamente)

- $x''(t) = 2t^2$

ep diff secondo ordine in cui t appare esplicitamente ma non compare t.

- $\underline{x(t) = 2t + 1}$ NON è un'eq. differenziale perché non compaiono delle derivate di x

---

Un'equazione differenziale in cui NON compare esplicitamente t (la variabile indipendente di x) è detta <u>AUTONOMA</u>.

Che cosa significa RISOLVERE una eq. differenziale? Ovvero, cos'è (se esiste) una soluzione di una eq. differenziale?

"Significa cercare una funzione che sia derivabile (quanto serve) in modo tale che sostituita nell'equazione differenziale sia verificata l'uguaglianza per ogni t".

$$\boxed{x'(t) = -2t\,x(t)}$$

eq. diff. ordine 1
non autonomo

Verifichiamo che $e^{-t^2} = x(t)$ è una soluzione dell'eq. differenziale proposta

$| \; \forall t$

$t \longmapsto e^{-t^2} = x(t)$ è derivabile ✓

$$x'(t) = e^{-t^2} \cdot \frac{d}{dt}(-t^2) = e^{-t^2} \cdot (-2t) = -2t \cdot x(t)$$

$$x(t) = e^{g(t)} \qquad g(t) = -t^2 \qquad \boxed{x'(t) = e^{g(t)} \cdot g'(t)}$$

$$\boxed{x'(t) = -2t\, x(t)} \quad (*)$$

Anche la funzione $t \longmapsto 0 \ \forall t$ è soluzione di $(*)$

Infatti la funzione costantemente nulla $x(t) \equiv 0 \ \forall t$

è derivabile, con derivata nulla $x'(t) \equiv 0 \ \forall t$

$$\boxed{0 = x'(t) = -2t \cdot \overset{x(t)}{0} \qquad \forall t}$$

Più in generale $\forall C \in \mathbb{R}$ $\quad t \mapsto C \cdot e^{-t^2}$ è una soluzione di $(*)$.

$$\boxed{x(t) = C \cdot e^{-t^2}}$$

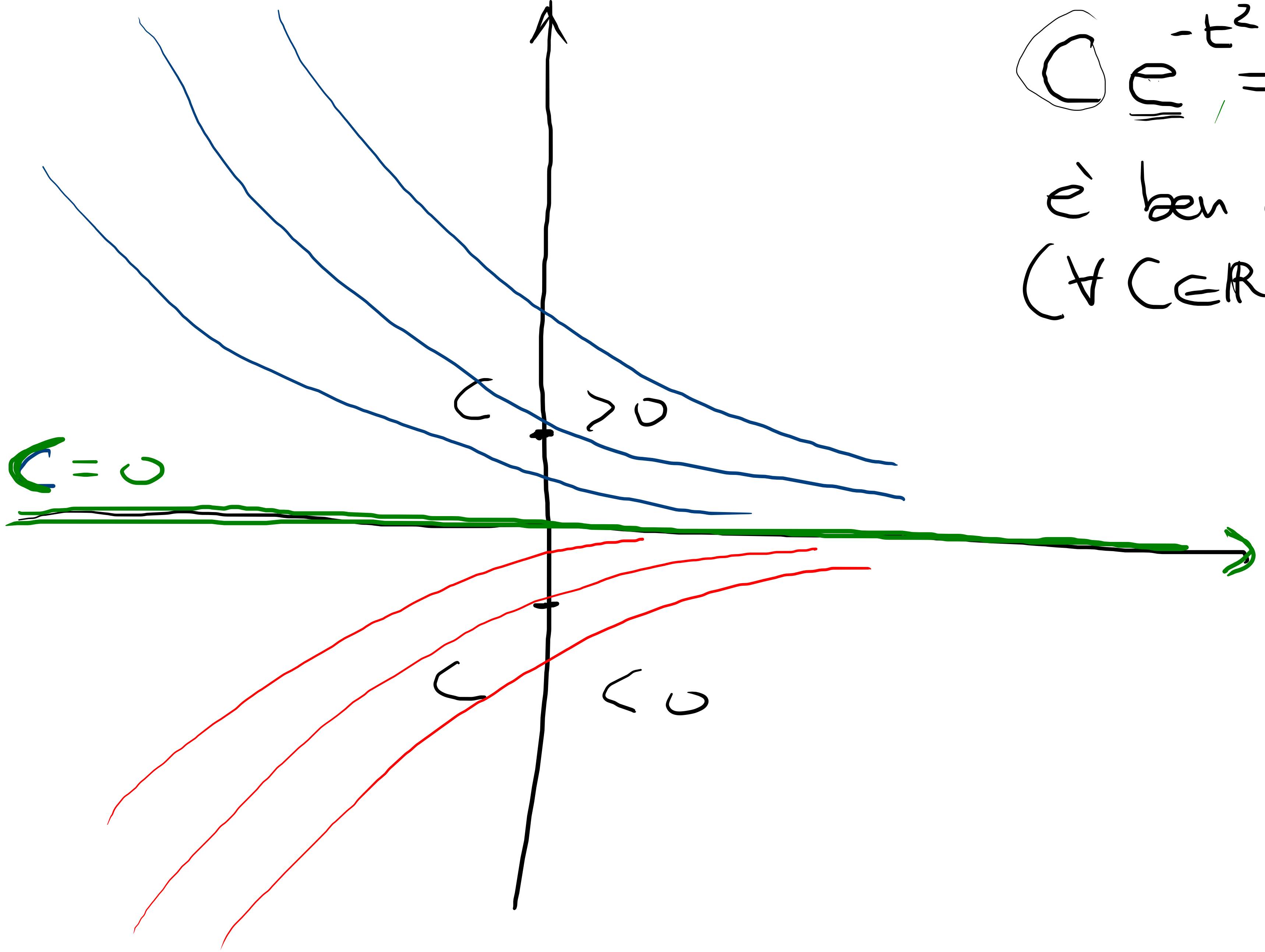
$$\underline{x'(t)} = \frac{d\,x(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\,\underbrace{C \cdot e^{-t^2}} = C \cdot \frac{d}{dt}\,e^{-t^2} =$$

$$= C \cdot \left(-2t\,e^{-t^2}\right) =$$

$$= -2t \cdot \underbrace{C \cdot e^{-t^2}}_{\substack{\shortparallel \\ x(t)}} = \underline{\underline{-2t \cdot x(t)}}$$

$$\forall t$$

$$\underline{\underline{\forall C \in \mathbb{R}}}$$



$C e^{-t^2} = x_C(t)$

è ben definito $\forall t \in \mathbb{R}$

$(\forall C \in \mathbb{R})$

$\mathrm{Dom}\, x_C = \mathbb{R}$
$\forall C \in \mathbb{R}$

$x_0(t) \equiv 0$

$$e^{x'(t)} - \cos x''(t) + x'(t)^{x(t)} - 2x(t) = 0$$

è un'eq. differenziale di ordine 2

e autonoma ;

Un'equazione differenziale di ordine n si dice in forma normale se ha il seguente aspetto

$$x^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n} x(t) = \Phi\left(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \dots, x'', x', x, t\right)$$

NON è in forma NORMALE

Equazioni differenziali del PRIMO ORDINE in forma normale

$$\boxed{x'(t) = \Phi(x(t), t)}$$

Φ è dunque interpretabile come una funzione in 2 variabili, t e $x(t)$.

Nel caso $\underline{x' = -2tx}$ $\quad \boxed{\Phi(x,t) = -2tx}$

Se l'eq differenziale considerata (di ordine 1 in forma normale) è autonoma allora Φ dipende solo da x!

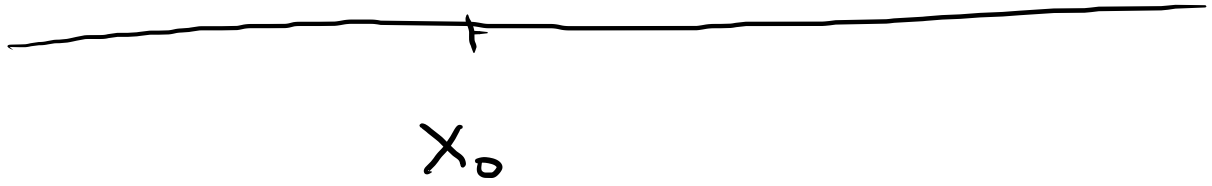
Caso semplice

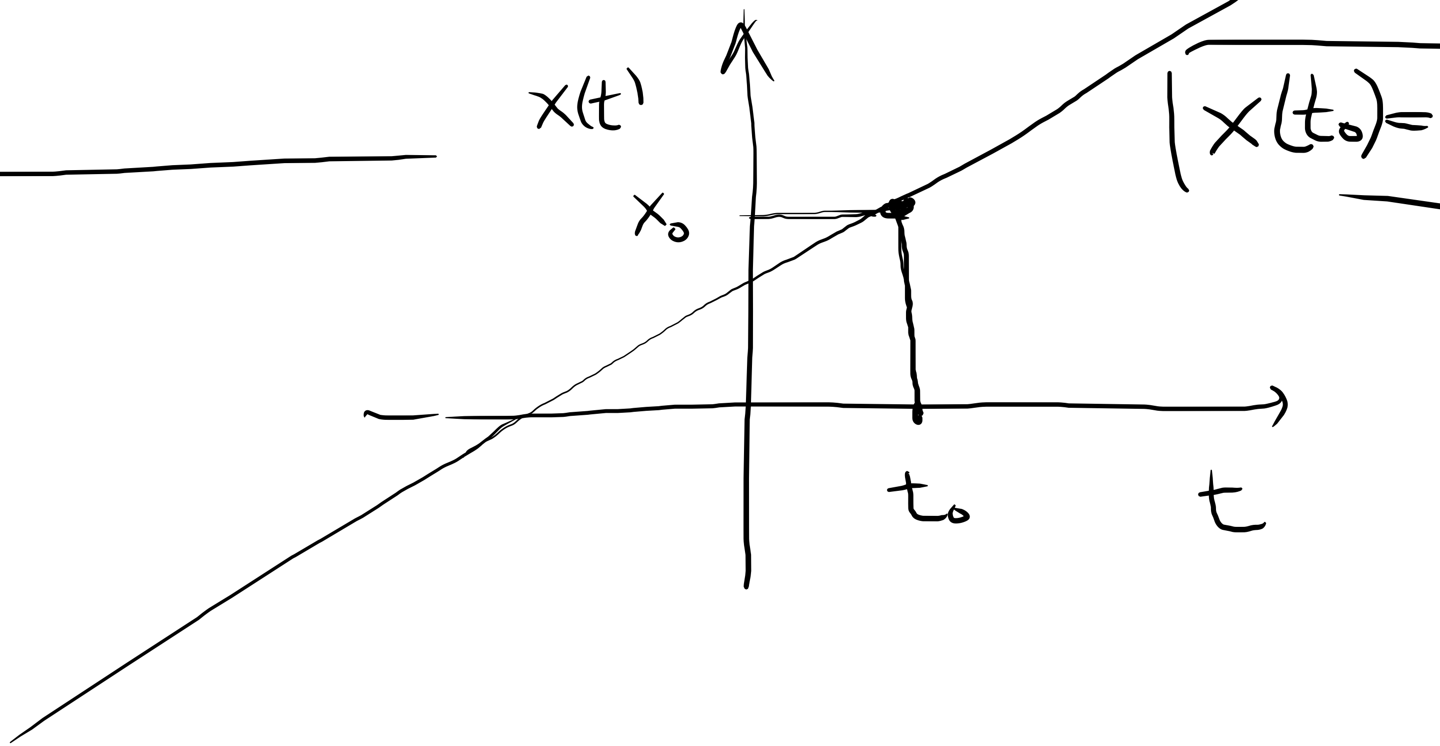
$$x'(t) = k \qquad k \text{ costante} \qquad \Phi(x(t), t) \equiv k$$

moto rettilineo uniforme

$$x(t) = k(t - t_0) + x_0$$

$$x_0 = x(t_0)$$





$$\boxed{x(t_0) = x_0}$$

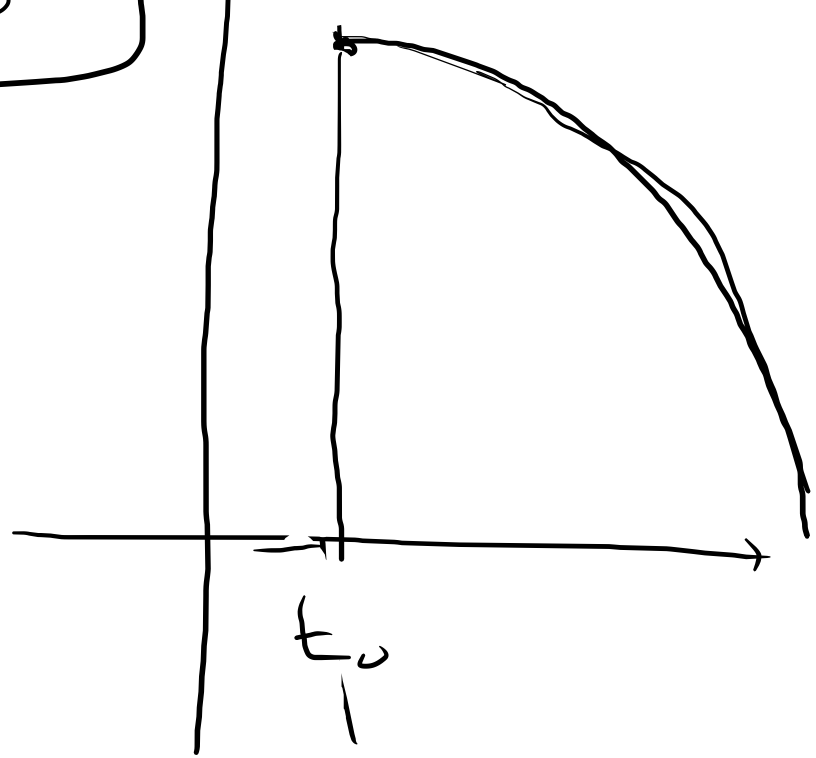
$$x''(t) = -g$$

$$\boxed{g = 9{,}8 \ m/sec^2}$$

moto con accelerazione costante

$$\boxed{x(t) = -\frac{g}{2}(t-t_0)^2 + B(t-t_0) + C}$$

$$\boxed{x(t_0) = C \qquad x'(t_0) = B}$$



$$\boxed{\frac{d}{dt}(t-t_0) = 1}$$

$$x'(t) = -\frac{\cancel{2}g}{\cancel{2}} \cdot (t-t_0) + B = -g(t-t_0) + B$$

$$\boxed{x''(t) = -g}$$

$$\circledcirc \quad \boxed{x'' = -g - h\,x'} \qquad \underbrace{h>0}$$

moto con accelerazione costante in presenza di attrito

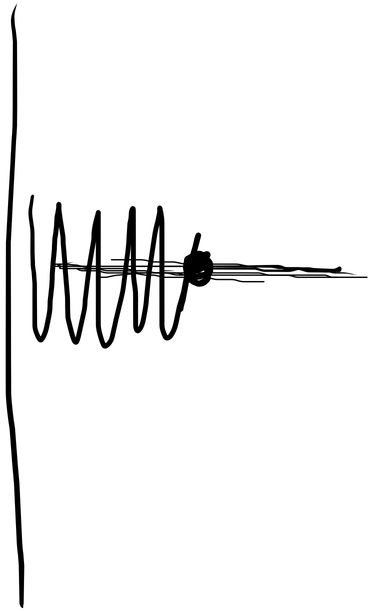
Verificare che

$$\boxed{x(t) = -\frac{g}{h}(t-t_0) + A\,e^{-h(t-t_0)} + B}$$

è soluzione di $\circledcirc$

$$x'(t) = \underline{\qquad\qquad}$$

$$x''(t) = \frac{d}{dt}\,x'(t)$$



$$x''(t) = -k\, x(t) \qquad \boxed{k>0}$$

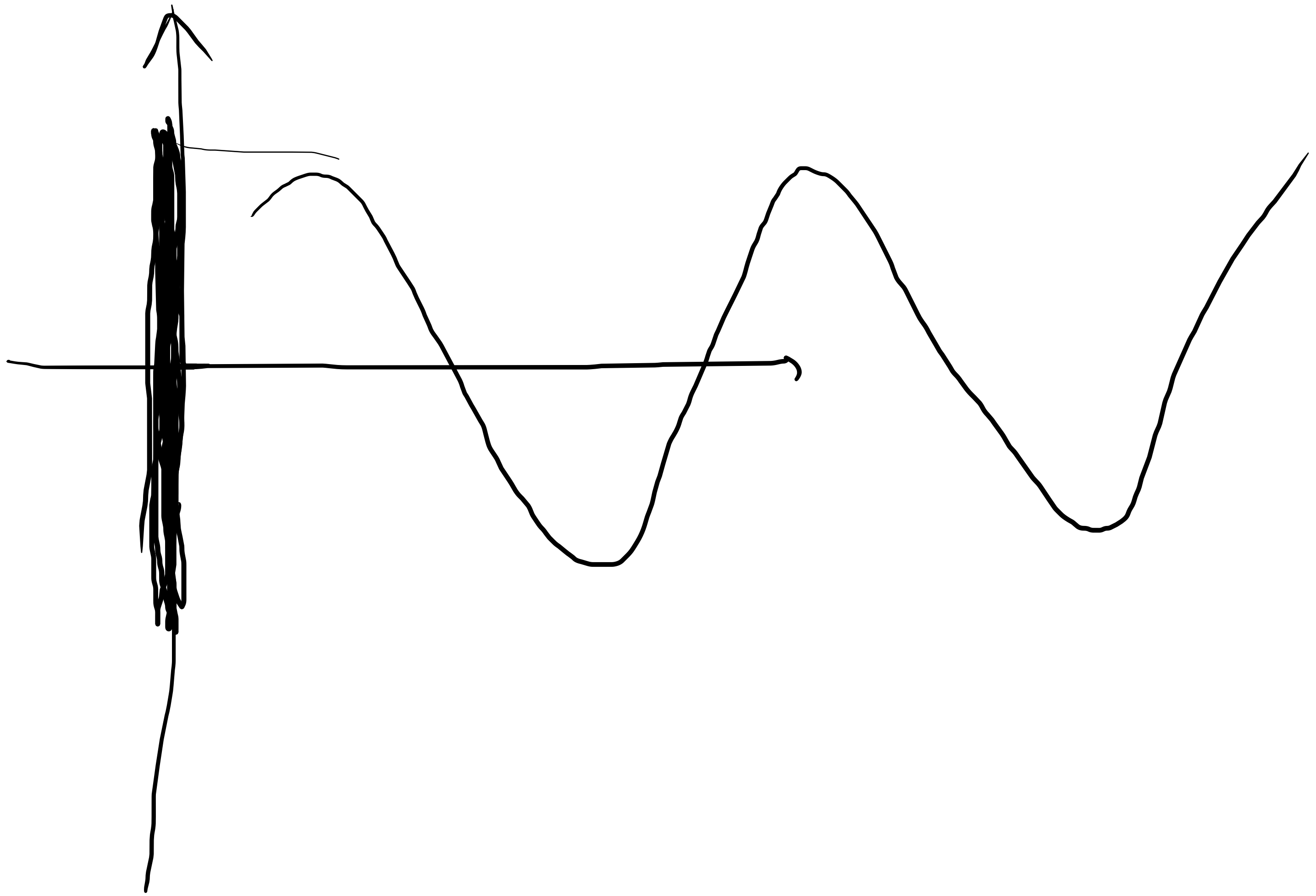
k costante della molla

Legge di Hooke

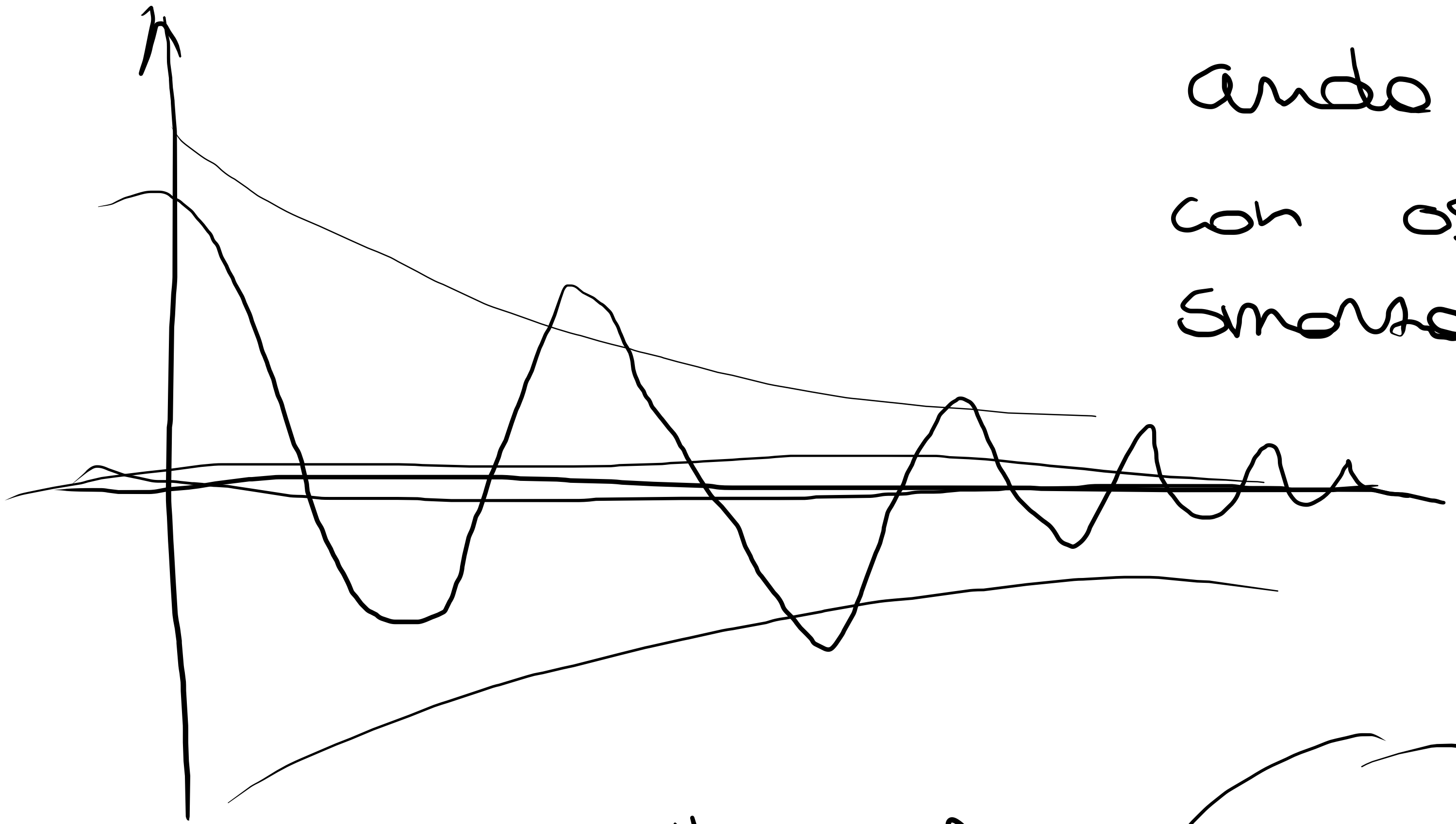
Oscillatore armonico

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{k}\,(t-t_0)\right) + B\cos\left(\sqrt{k}\,(t-t_0)\right)$$

$$= C \cdot \mathrm{sen}\left(\qquad \right)$$



modello ideale
senza attrito



andamento "reale"
con oscillazioni
smorzate (per attrito)

$$\underbrace{x'' = -k\,x}_{\text{AUTONOMA}} - h\,x'$$

h, k costanti
(positive)

eq differenziale
secondo ordine

Abbiamo tre possibilità

$$x'' = -kx - hx'$$

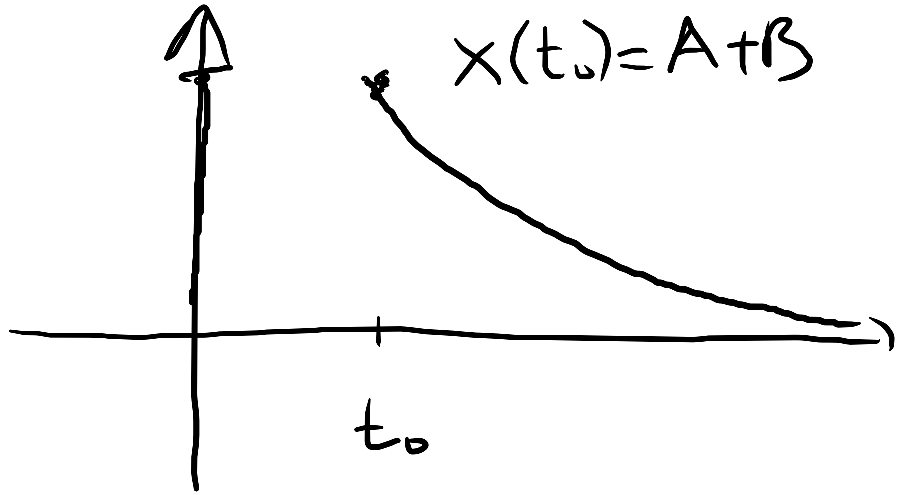
$h, k > 0$

1) $h^2 - 4k > 0$

$$m_1 = \frac{h - \sqrt{h^2 - 4k}}{2} > 0 \qquad m_2 = \frac{h + \sqrt{h^2 - 4k}}{2}$$

m_1 e m_2 sono positivi

$$\underbrace{x(t) = A \cdot e^{-m_1 (t - t_0)} + B \cdot e^{-m_2 (t - t_0)}}$$



Per le tecniche di risoluzione di eq differenziali ci limiteremo ad alcuni casi molto particolari

Per la verità in generale NON esistono metodi di risoluzione esplicita.

Consideremo principalmente eq. differenziali di ordine 1 in forma normale

$$\underbrace{x'(t) = \Phi(x(t), t)}$$

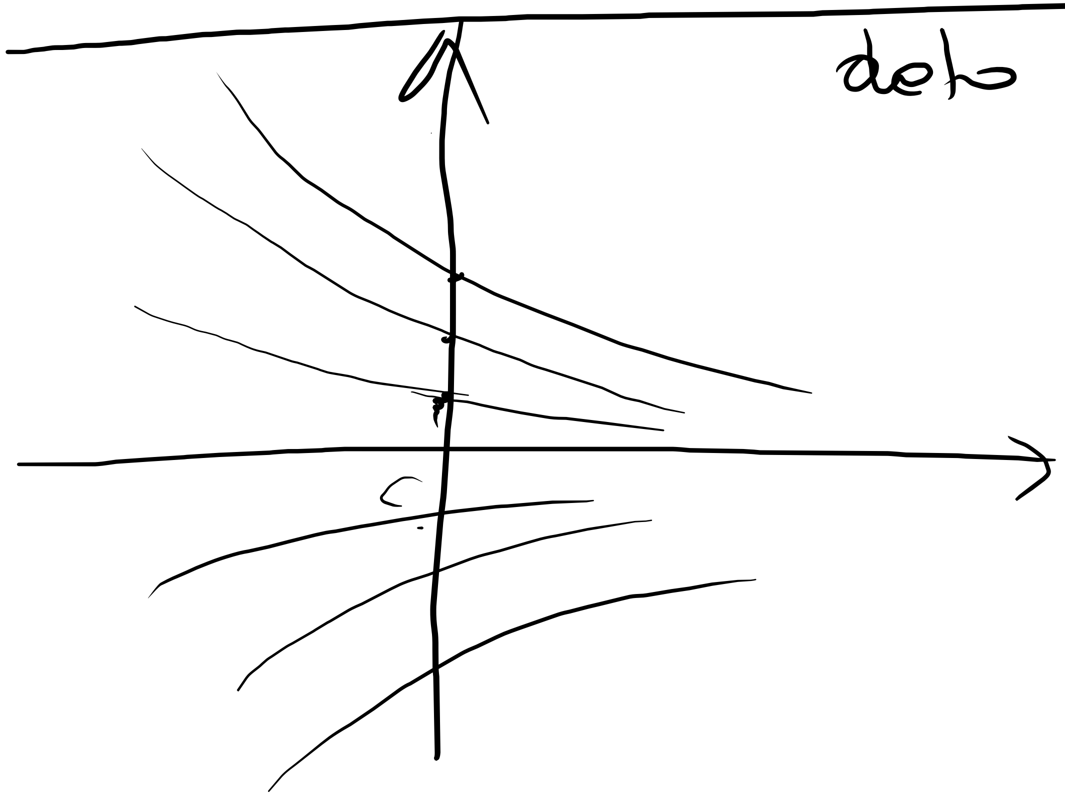
e le classificheremo a seconda delle caratteristiche di Φ.

Anzitutto (dai pochi esempi) appare chiaro che non è detto che esista una unica soluzione di una equazione differenziale.

Infatti $x'(t) = -2t\, x(t)$

ha per soluzioni certamente tutte le funzioni

$$x_c(t) = c \cdot e^{-t^2} \qquad c \in \mathbb{R}$$



Con l'ulteriore dato $\boxed{x(t_0) = x_0}$, potevo ricavare

c univocamente.

$$x_0 = c \cdot e^{-t_0}$$

$$\boxed{x_0 \cdot e^{t_0} = c}$$

Ad esempio

$$\begin{cases} x' = -2t\,x \\ x(1) = 4 \end{cases}$$

$$C = 4 \cdot e^{+1^2} = 4e$$

$$\boxed{x(t) = 4e\,e^{-t^2} = 4\,e^{1-t^2}}$$

$t_0 = 1$ $\quad x_0 = 4$ $\quad x(1) = 4e^{1-1} = 4 \cdot e^0 = 4.$

esempio di Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \Phi(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

(eq differenziale primo ordine in forma normale con dato iniziale

$$\star \quad \begin{cases} x'(t) = \sqrt{x(t)} = \bigcirc(x,t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Problema di Cauchy

eq differenziale primo ordine (autonomo) in forma normale

dato iniziale

$t_0 = 0 \quad x_0 = 0$

$x(t) = \frac{t^2}{4}$ è una soluzione del Problema di Cauchy $\star$, ma anche

$\neq$

$x(t) \equiv 0$ è una soluzione dello stesso problema di Cauchy $\star$

$x(t) = \frac{t^2}{4}$ $\quad x'(t) = \frac{2 \cdot t}{4} = t/2$ $\quad x'(t) = \sqrt{x(t)}$

$\sqrt{x(t)} = t/2$ $\quad \forall t$

$x(0) = 0$ $\quad$ OK ☆

$X(t) \equiv 0$ soddisfa $\underline{X(0)=0}$

$X' \equiv 0$ $\quad \underline{x'(t) = 0 = \sqrt{0} = \sqrt{x(t)} \quad \forall t}$

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{x(t)} \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

NON ha soluzioni

Per concludere consideriamo l'eq. differenziale del primo ordine in forma normale

$$x' = 2t\,x$$

e mostriamo che, a seconda del dato iniziale, cambia la soluzione al problema di Cauchy considerato.

1) $\begin{cases} x' = 2tx \\ x(0) = 1 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $x(t) = \frac{1}{1-t^2}$ è la soluzione

nell'intervallo $(-1,1) \ni 0$

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t^2}\right) = \frac{+2t}{(1-t^2)^2} \cancel{(1-t^2)} = +2t \cdot \frac{1}{1-t^2} = 2t \cdot x(t).$$

2) $\begin{cases} x' = 2tx \\ x(2) = -1/3 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $x(t) = \frac{1}{1-t^2}$ è la soluzione

ma nell'intervallo $(1,+\infty) \ni 2$

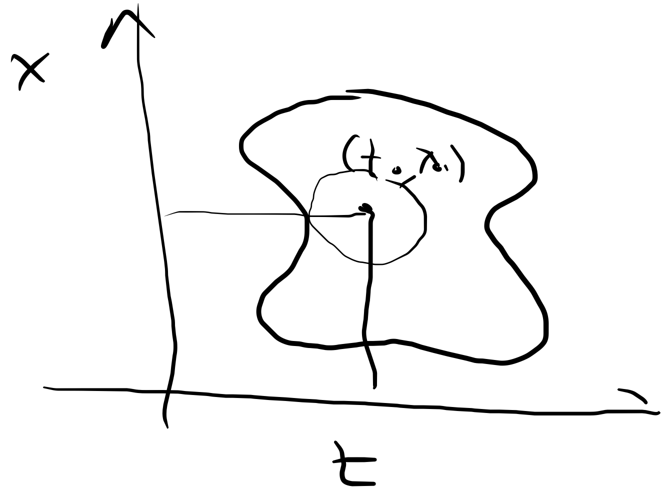
3) $\begin{cases} x' = 2tx \\ x(0) = -1 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $x(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ è la soluzione

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \cdot \cancel{(1+t^2)} = 2t\,x(t)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Teorema (di Cauchy)

Sia dato un problema di Cauchy



$$\circledast \quad \begin{cases} x'(t) = \Phi(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Se Φ come funzione di 2 variabili è continua in un intorno del punto (t_0, x_0) e se Φ ha derivata parziale rispetto a x continua in tale intorno, allora il problema di Cauchy $\circledast$ ha una ed una sola soluzione locale $\iff \exists\, \delta > 0 \ \exists\, x: (t_0-\delta, t_0+\delta) \to \mathbb{R}$ derivabile tale che

$x(t_0) = x_0$ e

$x'(t) = \Phi(x(t), t) \quad \forall t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$

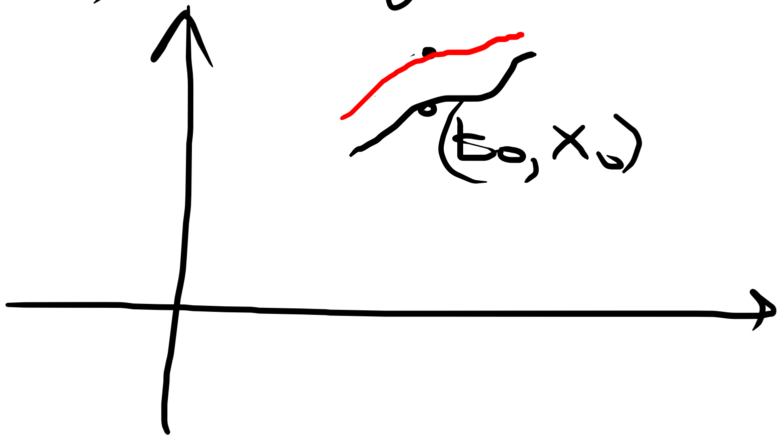
Conseguenza IMPORTANTE

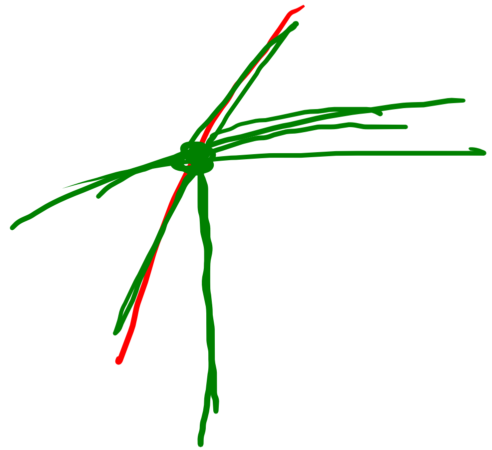
Dato un problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \Phi(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$x(t_1) = y_1$

per cui valgono le ipotesi del Teorema di Cauchy IN UN INTORNO di (t_0, x_0) i grafici delle soluzioni non si intersecano





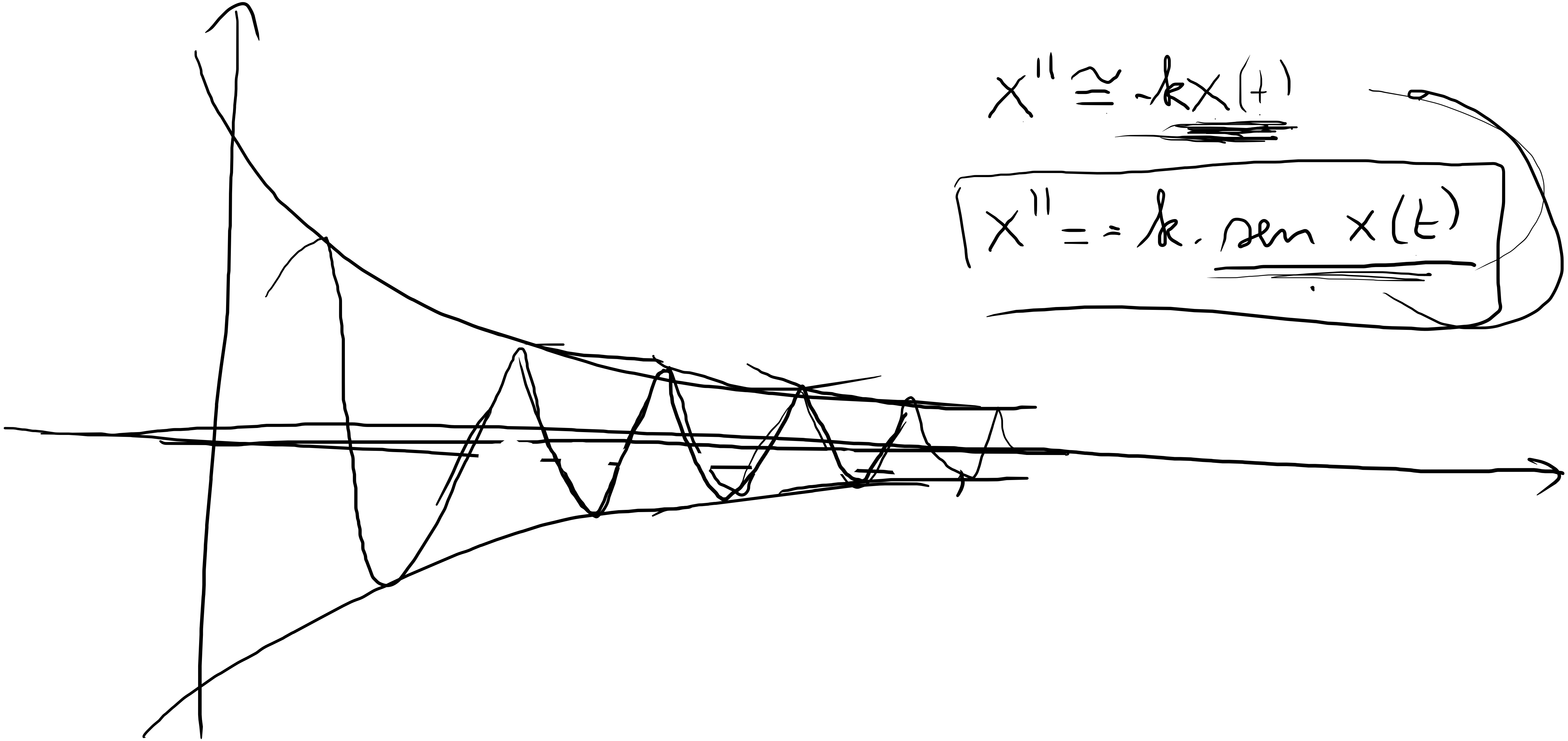
2) $h^2 = 4k \iff h^2 - 4k = 0$

$m = h/2$

$x(t) = A e^{-m(t-t_0)} + B \cdot t \, e^{-m(t-t_0)}$

3) $h^2 - 4k < 0$ $\quad p = h/2 \quad q = \frac{\sqrt{4k - h^2}}{2}$

$x(t) = e^{-p(t-t_0)} \cdot \left(A \operatorname{sen}(q \cdot (t-t_0)) + B \cos(q \cdot (t-t_0)) \right)$



$$x'' \cong -kx(t)$$

$$\boxed{x'' = -k \cdot \text{sen}\, x(t)}$$