Esercizi Algebra 1 - 2/12/20

(annaspagnolo97@gmail.com, francesco.digiorgio@studenti.units.it)

Esercizio 1

Sia $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ il prodotto cartesiano di $\mathbb{Z}$ per $\mathbb{Z}$; si definisca in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'addizione $+$ e la moltiplicazione $\circ$ ponendo $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + bc)$ per ogni $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Si denoti con $A = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \circ)$

1. Si dimostri che A è un anello commutativo con unità;
2. Si dimostri che A non è un dominio d'integrità e si determini l'insieme $div(A)$ dei divisori dello zero;
3. Si determini l'insieme $U(A)$ degli elementi invertibili;
4. Sia $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} = \{(x, 2y) | x, y \in \mathbb{Z}\}$, si dimostri che è un sottoanello di A.

Esercizio 2

Sia $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ il prodotto cartesiano di $\mathbb{Z}$ per $\mathbb{Z}$; si definisca in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'addizione $+$ e la moltiplicazione $*$ ponendo $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$ e $(a, b)*(c, d) = (ac, bc)$ per ogni $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Si denoti con $B = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, *)$.

1. Si dimostri che B è un anello, ma che non è commutativo e che non è dotato di unità.
2. Si dimostri che B non è un dominio d'integrità e si determini l'insieme $div(B)$ dei divisori dello zero;
3. Sia $S = \{(a, 0) | a \in \mathbb{Z}\}$, si dimostri che è un sottoanello di B.

Esercizio 3

Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathbb{R}$ il campo dei numeri reali. Nell'insieme

$$\mathbb{R}^X = \{f \mid f \colon X \to \mathbb{R} \text{ è un'applicazione}\}$$

si definiscano l'addizione e la moltiplicazione ponendo per ogni f, $g \in \mathbb{R}^X$ e per ogni $x \in X$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{e} \qquad (fg)(x) = f(x)g(x) \, .$$

Si provi che $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$ è un anello commutativo con unità.

Esercizio 4

Sia $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Si dimostri che $\mathbb{Z}[i]$ è un sottoanello dell'anello $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.