<u>Determinante</u> (matrici con righe o colonne uguali)

$$A = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} \qquad A^{(i)} = A^{(j)}$$

$\left[\underline{\underline{\text{Char}}}\ \mathbb{R} = 0 \right.$

$\left. \text{Char}\ \mathbb{Z}_2 = 2 \right]$

$\text{Char}\ \mathbb{Z}_p = p$

<u>Prop.</u> Se nel campo $\mathbb{K}$, ~~$2 \neq 0$ ($\mathbb{K}$ ha caratteristica $\neq 2$)~~

$\Rightarrow \det A = 0$ se $\exists\ i \neq j$ t.c. $A^{(i)} = A^{(j)}$

$$\det A = -\det A \Rightarrow 2 \det A = 0 \Rightarrow \boxed{\det A = 0} \quad \boxed{\text{~~(se } 2 \neq 0\text{)~~}} \quad \boxed{\text{in generale}}$$

$$2 = 0 \Rightarrow \boxed{1 = -1}$$

$$1 - (-1) = 2 = 0$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A = 1 - 1 = 0$

$\det A^\sigma = \det A_\sigma =$
$= \mathrm{sgn}(\sigma) \det A$

Permutazione delle righe (o colonne)

$A \in M_n(\mathbb{K})$ $\sigma \in \Sigma_n \rightsquigarrow A^\sigma \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A^{(\sigma(1))} \\ \vdots \\ A^{(\sigma(n))} \end{pmatrix}$

$\mathrm{sgn}\, \sigma = (-1)^k$

$A_\sigma = \begin{pmatrix} A_{(\sigma(1))} & \cdots & A_{(\sigma(n))} \end{pmatrix}$

$\sigma = (i\ j)$

$A^{(ij)}$

$\det A^\sigma$? $\det A_\sigma$?

$\det A^\sigma = (-1)^k \det A$
$\shortparallel$
$\det A_\sigma$

$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ τ_i trasposizioni

Scambio delle righe i e j

Matrici con una riga (o colonna) nulla

$$A = \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \; \cdots \; 0 \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \xleftarrow{\text{i-esima}} \implies \det A = 0$$

$$A^{(i)} = 0 \in K^n \qquad \lambda A^{(i)} = A^{(i)}$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} = \lambda \det A \qquad \forall \lambda \in K$$

$$\lambda = 0 \implies \det A = 0$$

Operazioni elementari : effetti sul determinante

1) Scambio di due righe : det A cambia segno

2) $A^{(i)} \mapsto \lambda A^{(i)}$, per un $\underline{i}$ fissato : il det A viene moltiplicato per λ

$A \rightsquigarrow A'$ $\qquad$ $\det A' = \lambda \det A$

3) Sommare ad una riga $A^{(i)}$ un'altra riga $A^{(j)}$, $j \neq i$, moltiplicata per un $\lambda \in \mathbb{K}$

$A \rightsquigarrow A'$ $\qquad$ $(A')^{(i)} = \underline{A^{(i)}} + \lambda \underline{A^{(j)}}$

$(A')^{(k)} = A^{(k)} \quad \forall k \neq i$

$$\det A' = \det A + \lambda \cancel{\det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}}$$

$\det A' = \det A$

Calcolo del det. col metodo di Gauss – Jordan

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 20 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 6 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{-11} & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 - 11/5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 19 = 76$$

Teorema di Binet Per ogni $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ si ha:

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$$

$$\boxed{\left(\det(A+B) \neq \det A + \det B\right) \text{ (in generale)}}$$

Dim

$A, B \in M_n(\mathbb{K})$ $\quad A = (a_{ij})$ $\quad$, $B = (b_{ij})$

$$(AB)^{(i)} = \left(\sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{h1}, \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{h2}, \dots, \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hn}\right) =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} a_{ih} \underbrace{(b_{h1}, b_{h2}, \dots, b_{hn})}_{B^{(h)}} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} B^{(h)}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}B^{(1)} + \cdots + a_{1n}B^{(n)} \\ a_{21}B^{(1)} + \cdots + a_{2n}B^{(n)} \\ \cdots \\ a_{n1}B^{(1)} + \cdots + a_{nn}B^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{h_1=1}^{n} a_{1h_1}B^{(h_1)} \\ \vdots \\ \sum_{h_n=1}^{n} a_{nh_n}B^{(h_n)} \end{pmatrix}$$

$$\det(AB) = \sum_{h_1=1}^{n} a_{1h_1} \begin{vmatrix} B^{(h_1)} \\ \sum_{h_2=1}^{n} a_{2h_2}B^{(h_2)} \\ \vdots \\ \sum_{h_n=1}^{n} a_{nh_n}B^{(h_n)} \end{vmatrix} = \sum_{h_2=1}^{n}\sum_{h_1=1}^{n} a_{1h_1}a_{2h_2} \begin{vmatrix} B^{(h_1)} \\ B^{(h_2)} \\ \sum \cdots \\ \vdots \\ \sum \cdots \end{vmatrix} =$$

multilinearità del det

$$= \det(AB) = \sum_{h_1,\dots,h_n=1}^{n} a_{1h_1} \cdots a_{nh_n} \begin{vmatrix} B^{(h_1)} \\ \vdots \\ B^{(h_n)} \end{vmatrix}$$

1) Se $\underline{h_i = h_j}$ per un certo $i \neq j$

$\Downarrow$

riga i-esima = riga j-esima $\Rightarrow \det = 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ Consideriamo solo indici di somma a due a due distinti

2) $h_1, \dots, h_n \rightsquigarrow \sigma \in \Sigma_n \quad \sigma(i) = h_i$

3) $$\det(AB) = \underline{\sum_{\sigma \in \Sigma_n} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}} \underbrace{\begin{vmatrix} B^{(\sigma(1))} \\ \vdots \\ B^{(\sigma(n))} \end{vmatrix}}_{= \operatorname{sgn}(\sigma) \det B} = \overbrace{\sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}^{\det A} \cdot \underline{\det B}$$

$$A, B \in M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \det(AB) = \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A$$
$$= \det(BA)$$

Corollario $\quad A \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} \neq 0$

Dim $\quad A A^{-1} = I_n \Rightarrow \det(A A^{-1}) = \det I_n = 1$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \|$ Teorema di Binet

$$\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

$\Rightarrow \det(A^{-1}) \neq 0$ e anche $\det A \neq 0$

e $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Corollario $\det : GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^* := \mathbb{K} - \{0\}$ è un

<u>omomorfismo di gruppi moltiplicativi</u>

Dim segue immediatamente dal teorema di Binet.

$$\det \text{ è } \begin{cases} \text{monomorfismo} \iff n = 1 \\ \text{epimorfismo} \quad \forall\, n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda^{-1} & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(\det) \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{\det} \lambda \qquad \forall\, \lambda \neq 0$$

Cofattore

$$A \in M_n(\mathbb{K}) \qquad A = (a_{ij})$$

Def A_{ij} = matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} A' & \times & A'' \\ \times\ \times\ \times & \times & \times\ \times\ \times \\ B' & \times & B'' \end{pmatrix} \leftarrow i \\ \uparrow \\ j \end{array} \rightsquigarrow \quad A_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} A' & A'' \\ \hline B' & B'' \end{array}\right)$$

<u>Def</u> consideriamo un'entrata a_{ij} della matrice A.

Chiamiamo <u>cofattore</u> (o <u>complemento algebrico</u>) di a_{ij}

lo scalare: $\underline{a_{ij}^*} := (-1)^{i+j} \left| A_{ij} \right| \in \mathbb{K}$

Si chiama matrice cofattore (o matrice aggiunta) di A la matrice

$$\underline{A^*} = \underline{\mathrm{cof}}(A) = \underline{\mathrm{adj}}(A) := {}^t\left(a_{ij}^* \right)$$

Es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1} \cdot 5 = 5 \quad , \quad a_{12}^* = -2$$

$$a_{21}^* = -(-3) = 3 \quad , \quad a_{22}^* = 1$$

$$\operatorname{cof} A = A^* = {}^t\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$