FOGLIO 6

① TROVARE ESEMPI DI MATRICI $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ t.c. $rg(AB) < \min\{rg\,A, rg\,B\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Idea: MATRICI A, B NON NULLE t.c. $AB = 0$.

→ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A.B = 0$. Aggiungere righe e colonne di zeri a piacere

(per esempio, nel caso 3×3 $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.)

② $f: V \to W$ lineare, $U \subseteq W$ sottospazio, $\tilde{U} := f^{-1}(U)$.

ⓐ $\tilde{U}$ sottosp. vett. di V?

$v_1, v_2 \in \tilde{U}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. $f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda \underbrace{f(v_1)}_{\in U} + \mu \underbrace{f(v_2)}_{\in U} \in U \Rightarrow \lambda v_1 + \mu v_2 \in \tilde{U}$ ✓.

ⓑ f suriettiva $\Rightarrow$ $\dim \tilde{U}$ in funzione di null f, $\dim U$?

$f: V \to W$ suriettiva $\Rightarrow f_{|\tilde{U}}: \tilde{U} \to U$ suriettiva $\Rightarrow rg\, f_{|\tilde{U}} = \dim U$.

$\Rightarrow \dim \tilde{U} = rg\, f_{|\tilde{U}} + null\, f_{|\tilde{U}} = \dim U + null\, f_{|\tilde{U}} = \dim U + \dim(\tilde{U} \cap Ker\, f)$.

$\tilde{U} = f^{-1}(U)$, $\underline{0} \in U \Rightarrow f^{-1}(\underline{0}) \subseteq \tilde{U} \Rightarrow \tilde{U} \cap Ker\, f = Ker\, f \Rightarrow \dim \tilde{U} = \dim U + null\, f$.

ⓒ f NON SURIETTIVA?

Vale tutto il ragionamento, ma $f_{|\tilde{U}}: \tilde{U} \to f(\tilde{U}) \overset{\text{(NON PER FORZA =)!}}{\subseteq} U$.

Quindi abbiamo $\dim \tilde{U} = \dim f(\tilde{U}) + null\, f \leq \dim U + null\, f$.

Es: per esempio, consideriamo $\begin{cases} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (x,y,0) \end{cases}$. $f^{-1}(\{x=0\}) = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}^2\}$,

ma $(0,1,1) \in \{x=0\}$, e $\nexists\, (0,y)$ s.t. $f((0,y)) = (0,1,1)$

③ Scrivere in forma matriciale i seguenti sistemi, determinare la giacitura e la dimensione dello spazio delle soluzioni.

Ⓐ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right)$

APPLICHIAMO L'ALGORITMO DI GAUSS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{(COMODITÀ)}]{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 3R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & -3 \\ 0 & 13 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{13}{7}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 4 & -2 & -2 \\ 0 & \boxed{7} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{13}{7}} & -3 + \frac{27}{7} \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -2 \\ 7x_2 - x_3 = -3 \\ \frac{9}{7}x_3 = -\frac{21}{7} + \frac{27}{7} = \frac{6}{7} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -2 \\ 7x_2 - x_3 = -3 \\ 9x_3 = 6 \end{cases} \Longrightarrow \text{UNICA SOLUZIONE} \begin{cases} x_1 = 2 + 4x_2 - 2x_3 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{-3 + x_3}{7} = -\frac{1}{3} \\ x_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ lo spazio delle soluzioni è $\left\{\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$. Ha dimensione 0 e giacitura $\{\underline{0}\}$.

Ⓑ $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Essendo il sistema omogeneo, possiamo dimenticarci della colonna finale nulla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_1]{} \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{-9} & 7 \end{pmatrix} \\ \uparrow \text{ PARAMETRO LIBERO} \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -9x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 3x_3 = -\frac{14}{9}x_3 + \frac{27}{9}x_3 = \frac{13}{9}x_3 \\ x_2 = \frac{7}{9}x_3 \end{cases} \Longrightarrow \Sigma = \left\{ x_3\left(\frac{13}{9}, \frac{7}{9}, 1\right) \,\middle|\, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ergo il sistema ha uno spazio delle soluzioni di dimensione 1 e giacitura $\left\langle \left(\frac{13}{9}, \frac{7}{9}, 1\right) \right\rangle$.

Ⓒ $\begin{cases} -5x + 2y + z = 0 \\ 4x - y - 3z = 1 \\ x + y + z = -2 \\ 3x - 4y + 5z = 4 \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_1]{\text{(PER COMODITÀ)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \\ -5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + 5R_1 \\ R_4 \to R_4 - 3R_1}]{R_2 \to R_2 - 4R_1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 9 \\ 0 & 7 & 6 & -10 \\ 0 & -7 & 2 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - \frac{7}{5}R_2]{R_3 \to R_3 + \frac{7}{5}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -10 + \frac{63}{5} \\ 0 & 0 & 9 & 10 - \frac{63}{5} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 9 & -\frac{13}{5} \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 + 9R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13 \cdot 8}{5} \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow rg(A|b) > rg(A) \Longrightarrow$ il sistema non ha soluzioni.