## FOGLIO 5

① $\begin{cases} T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \longmapsto (x-y,\ x+2y+z) \end{cases}$

ⓐ Scrivere la matrice di $T$ rispetto alle basi $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$.

- $T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ PRIMA COLONNA $\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$;
- $T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ SECONDA COLONNA $\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$;
- $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$ TERZA COLONNA $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Ergo, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. ✓

ⓑ Determinare $\operatorname{rg} T$, una base di $\operatorname{Im} T$, e una base di $\operatorname{Ker} T$.

$\operatorname{Im} T = \left\langle T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow \operatorname{rg} T = 2$, una base per $\operatorname{Im} T$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$.

$\operatorname{Ker} T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid T(x,y,z) = (0,0)\} = \{x,y,z \in \mathbb{R}^3 \mid x-y = x+2y+z = 0\}$.

$\to \left[ \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = -3y \end{cases} \right] \Rightarrow \operatorname{Ker} T = \{(y,y,-3y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,-3) \rangle$ ✓

② $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, con matrice associata alle basi canoniche $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$.

ⓐ $\operatorname{rg} f$, $\dim \operatorname{Ker} f$?

$\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(A)$. Calcoliamo il rango di $A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A = 2$; Inoltre sappiamo $\underbrace{\dim \mathbb{R}^5}_{=5} = \underbrace{\operatorname{rg} f}_{=2} + \dim \operatorname{Ker} f \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 2$. ✓

ⓑ <u>base di Ker f? base di Im f?</u>

• <u>Ker f?</u>

$$\operatorname{Ker} f = \{ x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0 \} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{RIDUZIONE} \\ \text{PER RIGHE} \\ \text{PUNTO (a)}}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

$$\rightarrow \text{Studiamo il sistema } \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ -x_2 + \underbrace{2x_3 - 3x_4 - 4x_5}_{\text{PARAMETRI LIBERI!}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ x_2 = 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{ (x_3 - 2x_4 + 3x_5,\ 2x_3 - 3x_4 - 4x_5,\ x_3,\ x_4,\ x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \langle \underbrace{(1,2,1,0,0),\ (-2,-3,0,1,0),\ (3,-4,0,0,1)}_{} \rangle.$$

$\dim \operatorname{Ker} f = 3 \Rightarrow$ questi generatori sono una base ✓✓.

• <u>Im f?</u>

Per trovare una base di Im f, la estraiamo dalle colonne di A: sapendo che $\dim \operatorname{Im} f = 2$, possiamo senza problemi considerare le prime due colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; essendo queste chiaramente l.i. formeranno una base di Im f.

In casi più complessi ($\operatorname{rk} f \geq 3$), nel calcolare il rango di A si può ridurre per colonne invece che per righe: una volta applicato l'equivalente dell'algoritmo di Gauss, le colonne non nulle rimanenti saranno una base di Im f.

Vediamo come verrebbe nel nostro caso:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3 \to C_3 + C_1 \\ C_4 \to C_4 - 2C_1 \\ C_5 \to C_5 - 3C_1}]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{-1} & 2 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{C_3 \to C_3 + 2C_2 \\ C_4 \to C_4 - 3C_2 \\ C_5 \to C_5 - 4C_2}]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ✓$$

VETTORI DELLA BASE DI Im f.

ⓒ <u>Stabilire per quali valori di h $(-2, h, h^2) \in \operatorname{Im} f$.</u>

$$(-2, h, h^2) \in \operatorname{Im} f \iff (-2, h, h^2) \in \langle (1,2,-3), (0,-1,1) \rangle \iff \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & h & h^2 \end{pmatrix} = 2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & h & h^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & h+4 & h^2 - 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - (h+4)R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & h^2 - 6 + h + 4 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \left[ \operatorname{rg} = 2 \iff h^2 + h - 2 = 0 \iff (h+2)(h-1) = 0 \iff \underbrace{h = 1 \vee h = -2}_{\text{VALORI ACCETTABILI DI } h.} \right] ✓✓✓.$$

③ $A, B \in M(n \times n, \mathbb{K})$ sono equivalenti per righe se si può passare dall'una all'altra con trasformazioni elementari sulle righe.

ⓐ Ogni matrice è equivalente per righe ad una matrice a gradini $A_1$ con tutti i pivot uguali a 1.

Questo è semplice, basta applicare l'algoritmo di Gauss e poi dividere ogni riga non nulla per il suo pivot $\checkmark\checkmark\checkmark$.

ⓑ $A_1$ è equiv. per righe ad una matrice $A_2$ con tutti i pivot uguali a 1 e tutti gli altri elementi nella colonna di ogni pivot uguali a zero. ($A_2$ è ridotta per righe)

Partiamo da $A_1$. Avrà la forma $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & 0 \cdots 0 & 1 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$.

Partiamo dall'ultimo pivot (quello più a destra):

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & 0 & \cdots \boxed{1} \cdots & \leftarrow \text{RIGA } i \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots 0 \cdots & \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ \text{COLONNA } k \end{array} \Rightarrow \text{agiamo così: } \forall j < i \quad R_j \longrightarrow R_j - a_{jk} R_i$$

$\Rightarrow$ i posti delle prime $k-1$ colonne non cambiano, e sopra a $a_{ik} = 1$ otteniamo tutti zeri.

Ripetiamo per tutti i pivot precedenti a ritroso e otteniamo $A_2$ $\checkmark\checkmark\checkmark$.

④ $f: V \to W$ lineare ($V, W$ sp. vett. di dimensione finita)

ⓐ $f$ iniettiva $\Rightarrow \exists\, g: W \to V$ s.t. $g \circ f = id_V$, $g$ suriettiva.

Consideriamo una base $e_1, \dots, e_n$ di $V$. $f$ iniettiva $\Rightarrow \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ base di $Im f \subseteq W \Rightarrow$ Completiamo ad una base $\mathcal{B}$ di $W$, e definiamo $g$ tramite i suoi valori su $\mathcal{B}$:

$g(f(e_i)) := e_i$, e $g(w_j) = 0$ per tutti gli altri vettori di $\mathcal{B}$. ($\text{!}\ Im\, g = \langle g(\mathcal{B}) \rangle = V \checkmark$)

$\Rightarrow g \circ f(e_i) = e_i = id_V(e_i)\ \forall i = 1, \dots, n \underset{e_1, \dots, e_n \text{ BASE DI } V}{\Longrightarrow} g \circ f = id_V$ $\checkmark\checkmark\checkmark$.

ⓑ $f$ suriettiva $\Rightarrow \exists\, g: W \to V$ iniettiva s.t. $f \circ g = id_W$.

$e_1, \dots, e_n$ base di $V \Rightarrow \{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ generatori di $Im f = W \Rightarrow$

$\Rightarrow$ estraiamo una base $\{f(e_{i_1}), \dots, f(e_{i_k})\}$ di $W$; definiamo $g(f(e_{i_j})) := e_{i_j}$.

$rg\, g = \dim \langle e_{j_1}, \dots, e_{j_k} \rangle = k = \dim W \Rightarrow \dim Ker\, g = 0$ $\checkmark$; $(f \circ g)(f(e_{i_j})) = f(e_{i_j}) = id_W(f(e_{i_j})) \Rightarrow f \circ g = id_W$ $\checkmark\checkmark$

## DIMOSTRAZIONI CAPITOLO 8

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di $V$, $f: V \to W$ lineare, $\forall i$ $w_i = f(v_i)$.

- $f$ suriettiva $\iff$ $w_1, \dots, w_n$ generatori di $W$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sappiamo in generale $f(\text{GENERATORI}) = \left(\text{GENERATORI DI } \mathrm{Im} f\right)$, $\mathrm{Im} f = W$ ✓.

$\boxed{\Leftarrow}$ $w \in W \Rightarrow w = \sum \lambda_i w_i = \sum \lambda_i f(v_i) = \sum f(\lambda_i v_i) = f\left(\sum \lambda_i v_i\right) \Rightarrow w \in \mathrm{Im} f$ ✓✓✓.

- $f$ iniettiva $\iff$ $w_1, \dots, w_n$ l.i.

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, $a_1 w_1 + \dots + a_n w_n = 0 \iff f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = 0 \iff$

$\iff a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in \mathrm{Ker} f$.

$\boxed{\Rightarrow}$ $f$ iniettiva $\Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\}$. $v_1, \dots, v_n$ base $\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0 \Rightarrow w_1, \dots, w_n$ l.i. ✓✓✓

$\boxed{\Leftarrow}$ $w_1, \dots, w_n$ l.i. $\Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \mid a_1 w_1 + \dots + a_n w_n = 0\} = \{0\}$ ✓✓