FOGLIO 6

① W_1, W_2 sottospazi vettoriali di V, $\dim V = n < +\infty$. $\left\{ \begin{array}{l} f: W_1 \times W_2 \to V \\ (w_1, w_2) \mapsto w_1 + w_2 \end{array} \right.$

(i) f applicazione lineare?

$(w_1, w_2), (w_1', w_2') \in W_1 \times W_2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$f(\lambda(w_1, w_2) + \mu(w_1', w_2')) = f((\lambda w_1 + \mu w_1', \lambda w_2 + \mu w_2')) = \lambda w_1 + \mu w_1' + \lambda w_2 + \mu w_2' =$

$= \lambda(w_1 + w_2) + \mu(w_1' + w_2') = \lambda f((w_1, w_2)) + \mu f((w_1', w_2'))$. ///.

(ii) determinare $\operatorname{Im} f$. Cosa si può dire sulla sua dimensione?

$\operatorname{Im} f = \{ v \in V \mid \exists (w_1, w_2) \in W_1 \times W_2 \text{ t.c. } f((w_1, w_2)) = v \} = \{ v \in V \mid \exists w_1, w_2 \in W_1 \times W_2 \text{ t.c. } v = w_1 \ldots$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = W_1 + W_2$.

$\dim \operatorname{Im} f = \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 \leq \dim W_1 + \dim W_2$.

L'uguaglianza vale solo nel caso $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$, ovvero $W_1 \oplus W_2$.

In alternativa, $\dim \operatorname{Im} f = \dim W_1 \times W_2 - \dim \operatorname{Ker} f \leq \dim W_1 \times W_2 = \dim W_1 + \dim W_2$.

(iii) Descrivere gli elementi di $\mathrm{Ker} f \subseteq W_1 \times W_2$. Costruire una base di $\mathrm{Ker} f$ a partire da una base di $W_1 \cap W_2$. Calcolare la dimensione di $\mathrm{Ker} f$.

$$f((w_1, w_2)) = 0 \iff w_1 + w_2 = 0 \iff w_2 = -w_1.$$

In particolare questo implica che $w_1, w_2 \in W_1 \cap W_2$.

$\Rightarrow \mathrm{Ker} f = \{ (w, -w) \in W_1 \times W_2 \mid w \in W_1 \cap W_2 \}$. Quindi

$\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m\}$ base di $W_1 \cap W_2 \Rightarrow \{ (\tilde{w}_1, -\tilde{w}_1), \dots, (\tilde{w}_m, -\tilde{w}_m) \}$ base di $\mathrm{Ker} f$.

Ergo, $\dim \mathrm{Ker} f = \dim W_1 \cap W_2$.

(iv) Dare una dimostrazione della formula di Grassmann come conseguenza del teorema della dimensione per l'applicazione f.

Vogliamo dimostrare $\quad \dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$.

Sappiamo $\quad \dim(W_1 \times W_2) = \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Ker} f)$.

$$\Rightarrow \dim(W_1 + W_2) \underset{\uparrow \text{ PUNTO (ii)}}{=} \dim(\mathrm{Im} f) \underset{\uparrow \text{ TEOREMA DELLA DIMENSIONE}}{=} \dim(W_1 \times W_2) - \dim(\mathrm{Ker} f) \underset{\uparrow \text{ (iii)}}{=} \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2. \ //$$

② $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ sp. vett. dei polinomi di grado ≤ 3 in x. $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ base di V.

(i) $\begin{cases} T: V \to V \\ p(x) \mapsto p'(x) \cdot (x-1) \end{cases}$ lineare? Scrivere $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$.

$$T(\lambda p(x) + \mu q'(x)) = (\lambda p(x) + \mu q(x))' \cdot (x-1) = (\lambda p'(x) + \mu q'(x)) \cdot (x-1) =$$
$$= \lambda p'(x) \cdot (x-1) + \mu q'(x) \cdot (x-1) = \lambda T(p(x)) + \mu T(q(x)) \ \checkmark$$

$T(1) = (1)'(x-1) = 0, \quad T(x) = (x)'(x-1) = 1 \cdot (x-1) = x - 1.$

$T(x^2) = (x^2)' \cdot (x-1) = 2x \cdot (x-1) = 2x^2 - 2x \qquad T(x^3) = \underbrace{(x^3)'}_{=3x^2} \cdot (x-1) = 3x^3 - 3x^2$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ T(1) & T(x) & T(x^2) & T(x^3) \end{array} \end{array}.$$

(COLONNE DI T = IMMAGINI DEI VETTORI DELLA BASE INIZIALE SCRITTI IN COMPONENTI RISPETTO ALLA BASE FINALE.)

(ii) Descrivere $\ker T$, $\operatorname{Im} T$. Calcolare le dimensioni.

• $\operatorname{Im} T$?

$\operatorname{Im} T = \langle T(1), T(x), T(x^2), T(x^3) \rangle = \langle x-1,\ 2x^2-2x,\ 3x^3-3x^2 \rangle$.

Questi 3 sono l.i?

Le componenti rispetto a $\mathcal{B}$ sono $\begin{cases} x-1 = (-1,1,0,0) \\ 2x^2-2x = (0,-2,2,0) \\ 3x^3-3x^2 = (0,0,-3,3) \end{cases}$. Questi sono chiaramente l.i. ✓

$\Rightarrow \{x-1,\ 2x^2-2x,\ 3x^3-3x^2\}$ base di $\operatorname{Im} T$, $\dim \operatorname{Im} T = 3$.

• $\ker T$?

$\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \Rightarrow \dim \ker T = 1$.

In particolare, $T(1) = 0 \Rightarrow \ker T = \langle 1 \rangle = \{\text{FUNZIONI COSTANTI}\}$, e $\{1\}$ è una base ✓✓.

(iii) Verificare $\ker T \oplus \operatorname{Im} T = V$.

Questo è valido $\iff \{1,\ x-1,\ 2x^2-2x,\ 3x^3-3x^2\}$ è una base di $V \iff$ sono l.i.

$\operatorname{rk} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}}_{(\text{RIGHE} = \text{COMPONENTI DEI VETTORI RISPETTO A } \mathcal{B})} = 4 \Rightarrow$ sono l.i ✓. Quindi, $\ker T + \operatorname{Im} T = V$, e

$\dim(\ker T + \operatorname{Im} T) = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T \Rightarrow$ SOMMA DIRETTA ✓✓✓.

③ $E_{ij} = \left(\begin{matrix}\text{MATRICE } n\times n \text{ CON TUTTI} \\ \text{ELEMENTI NULLI} \\ \text{TRANNE 1 IN POSTO } i,j\end{matrix}\right)$, $E_{\lambda,i} = \left(\begin{matrix}\text{MATRICE DIAGONALE } n\times n \\ \text{CON TUTTI 1 TRANNE} \\ \lambda \text{ AL POSTO } i,i\end{matrix}\right)$, $A \in M(n\times n, \mathbb{K})$.

(i) $E_{ij}\cdot A$? $\quad (E_{ij} = (e_{ls}),\ A = (a_{ls}))$

$B = (b_{ls})$, $B = E_{ij}\cdot A$. $\forall l \neq i$ la riga l di E_{ij} è nulla $\Rightarrow \forall l \neq i, \forall s\ b_{ls} = 0$.

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 \\ b_{i1} \text{ — } b_{in} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad b_{is} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{e_{ik}}_{\text{0 SE NON } k=j} \cdot a_{ks} = e_{ij}\, a_{js} = a_{js}$

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{i1} \text{ — } a_{in} \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $E_{\lambda i}\cdot A$? $\quad (E_{\lambda i} = (e_{ls}),\ A = (a_{ls}))$

$C = (c_{ls})$, $C = E_{\lambda i}\cdot A$. $\qquad c_{ls} = \sum_{k=1}^{n} e_{lk}\cdot a_{ks} = \begin{cases} l\neq i: & \sum_{k=1}^{n} \underbrace{e_{lk}}_{\text{TUTTI ZERO TRANNE } e_{ll}=1} a_{ks} = a_{ls} \\ l=i: & \sum_{k=1}^{n} \underbrace{e_{ik}}_{\text{TUTTI ZERO TRANNE } e_{ii}=\lambda} a_{ks} = \lambda a_{is} \end{cases}$

$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} a_{11} \text{ — } a_{1n} \\ \lambda a_{i1} \text{ — } \lambda a_{in} \\ a_{n1} \text{ — } a_{nn} \end{pmatrix}$.

(iii) Dedurre che le matrici ottenute da A con una trasformazione elementare del I° o II° tipo si possono esprimere come $M \cdot A$, M una matrice opportuna.

I° $A \xrightarrow[R_i \to \lambda R_i]{} A' \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = E_{\lambda i} \cdot A$ ✓.

II° $A \xrightarrow[R_i \to R_i + R_j]{} A' \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1}+a_{j1} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{riga } i$

$\Rightarrow A' = A + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{j1} \cdots a_{jn} \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{riga } i = A + E_{ij} \cdot A \underset{A = I_n \cdot A}{=} (I_n + E_{ij}) A$ ✓✓.

④ $V = \mathbb{K}[t]$ spazio vettoriale (di dimensione infinita!) dei polinomi in t.

$\mathcal{B} = \{v_i = t^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ base (infinita!) di V, $v_i^* \in V^*$ le forme lineari $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$.

Dimostrare che $\{v_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ non generano V^* trovando un controesempio.

$\langle \{v_i^*\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle = \{$COMBINAZIONI LINEARI FINITE DEI $v_i^*\}$. $\begin{cases} f: V \to \mathbb{K} \\ p(t) \mapsto p(1) \end{cases}$ lineare. $f \in \langle \{v_i^*\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle$?

$f(t^i) = 1 \ \forall i \Rightarrow f = \sum_{i=1}^{+\infty} v_i^* \Rightarrow$ è una c.l. ma non finita ✓✓.

⑤ Calcolare $rg\begin{pmatrix} K & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & K \end{pmatrix}$. Per quali valori di K è invertibile? $\left(A = \begin{pmatrix} K & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & K \end{pmatrix}\right)$

$$\begin{pmatrix} K & 1 & 1 \\ 1 & K & 1 \\ 1 & 1 & K \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & K \\ 1 & K & 1 \\ K & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - KR_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & K \\ 0 & K-1 & 1-K \\ 0 & 1-K & 1-K^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & K \\ 0 & K-1 & 1-K \\ 0 & 0 & 2-K-K^2 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 3 \Leftrightarrow K-1 \neq 0,\ 2-K-K^2 \neq 0 \Leftrightarrow K \neq 1,\ -(K+2)\cdot(K-1) \neq 0 \Leftrightarrow K \neq 1, -2$.

$\underline{K=1} \to rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$, $\underline{K=-2} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to rg(A) = 2$.

In particolare, A è invertibile $\Leftrightarrow rg\,A = 3 \Leftrightarrow K \neq 1, -2$.

6. Calcolare la cardinalità di $GL(n, \mathbb{Z}_p) = \left\{ \begin{array}{c} \text{MATRICI INVERTIBILI} \\ n \times n \text{ CON ELEMENTI} \\ \text{IN } \mathbb{Z}_p \end{array} \right\}$.

Una matrice è invertibile $\iff$ ha rango massimo $\iff$ tutte le sue righe sono l.i..

Ragioniamo riga per riga:

$R_1 = ([a_{11}], \dots, [a_{1n}]) \Rightarrow$ Abbiamo p scelte per ognuno dei suoi n elementi

$\Rightarrow$ abbiamo p^n scelte per R_1. Da queste, perché $\{R_1\}$ sia indipendente,

dobbiamo togliere la scelta $R_1 = ([0], \dots, [0]) \Rightarrow$ Abbiamo $p^n - 1$ scelte possibili per R_1.

R_2 deve essere l.i. da $R_1 \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{Z}_p \; R_2 \neq \lambda R_1 \rightarrow p^n - p$ scelte possibili per R_2

R_3 deve essere l.i. da $R_1, R_2 \Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{Z}_p \; R_3 \neq \lambda R_1 + \mu R_2 \Rightarrow p^n - p^2$ scelte per R_3

---- (RIPETIAMO)

R_n deve essere l.i. da $R_1, \dots, R_{n-1} \Rightarrow \forall \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{Z}_p \; R_n \neq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i R_i \Rightarrow p^n - p^{n-1}$ scelte per R_n

$$\Rightarrow |GL(n, \mathbb{Z}_p)| = (p^n - 1) \cdot (p^n - p) \cdot (p^n - p^2) \cdot \dots \cdot (p^n - p^{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i). \;\checkmark\checkmark\checkmark$$

↑
MOLTIPLICHIAMO
TUTTE LE
SCELTE POSSIBILI