Geometria 1 per Matematica e IADA

Foglio di esercizi 7

3 dicembre 2020

1) Calcolare il rango e determinare una base per il sottospazio vettoriale generato dalle righe delle seguenti matrici a entrate in $\mathbb{C}$, e trovare l'inversa di quelle invertibili:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2i & -2+\frac{1}{2}i & 1 & 0 \\ -2+2i & -\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & -1 & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i & -1 \\ 1-i & 3-i \\ i & i \end{pmatrix}.$$

2) Fare lo stesso per le seguenti matrici, considerandole a entrate prima in $\mathbb{Z}_2$ e successivamente in $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Determinare $r, s \in \mathbb{Z}$ tali che $ra + sb = \mathrm{MCD}(a, b)$ nei seguenti casi

$$(a, b) = (14, 12); \quad (a, b) = (-20, 7); \quad (a, b) = (42, 11).$$

4) Determinare 4^{-1} in $\mathbb{Z}_3$, in $\mathbb{Z}_{11}$ e in $\mathbb{Z}_{13}$.

5) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita come $f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3)$. Dimostrare che f è lineare e determinare una base per $\ker f$ e una base per $\operatorname{im} f$. Completare se necessario queste basi a basi, rispettivamente, di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ e scrivere la matrice di f rispetto alle basi così ottenute.

Verificare poi che i vettori $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -2, 0), v_3 = (0, 1, 1)$ sono una base per $\mathbb{R}^3$ e i vettori $w_1 = (1, -1), w_2 = (2, 3)$ sono base per $\mathbb{R}^2$, e quindi scrivere la matrice di f rispetto a queste basi.

6) Verificare che i vettori $v_1 = (1, 1, -3, 1), v_2 = (-2, 0, 1, 0)$ sono linearmente indipendenti e completarli ad una base di $\mathbb{R}^4$.

7) Scrivere la tabella di addizione di $\mathbb{Z}_3$.

8) Dimostrare che l'unico omomorfismo di gruppi additivi $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_4$ è quello nullo.

9) Dimostrare che l'unico omomorfismo di gruppi additivi $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$ è quello nullo, per ogni $n \geq 2$.